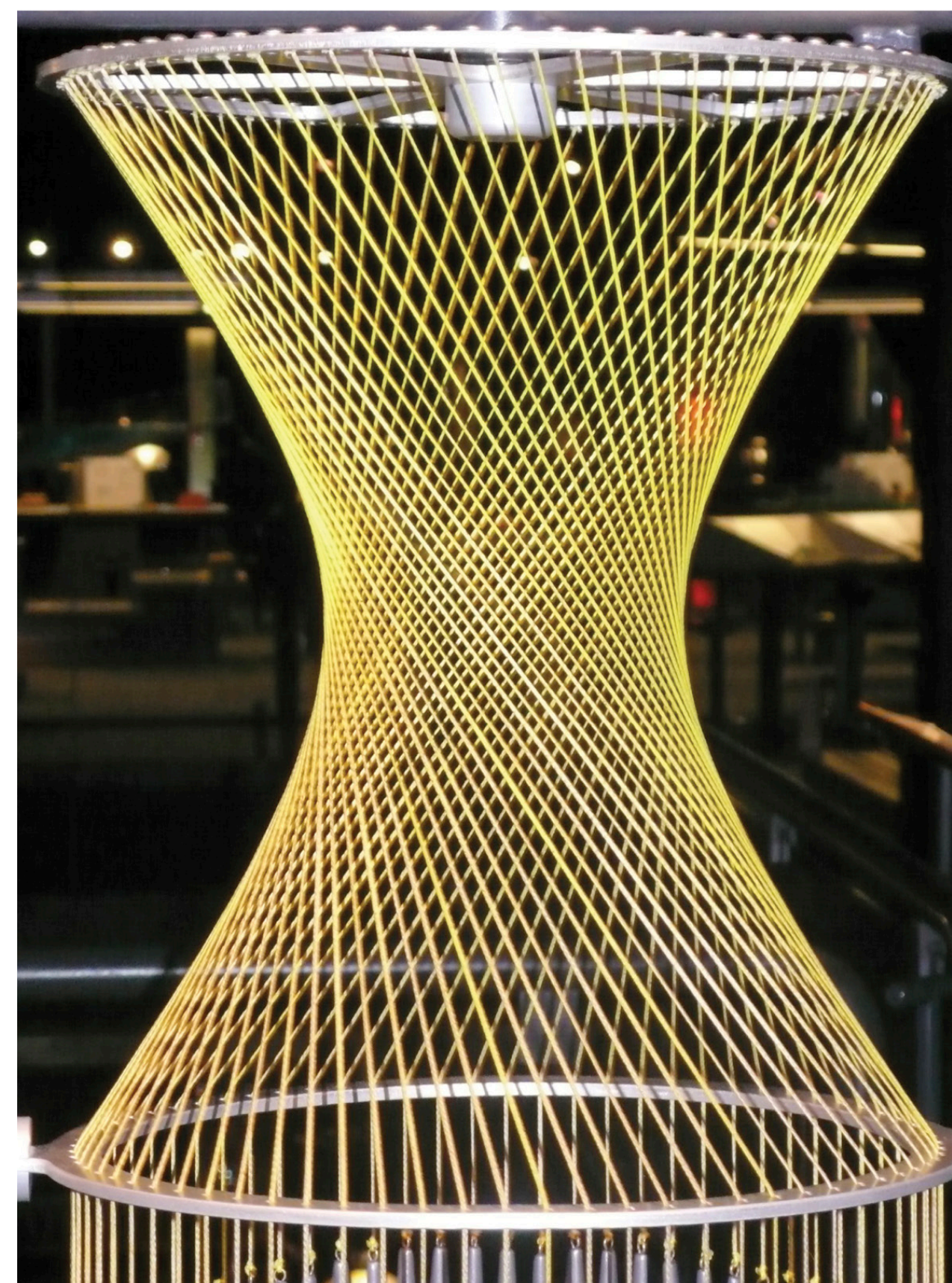
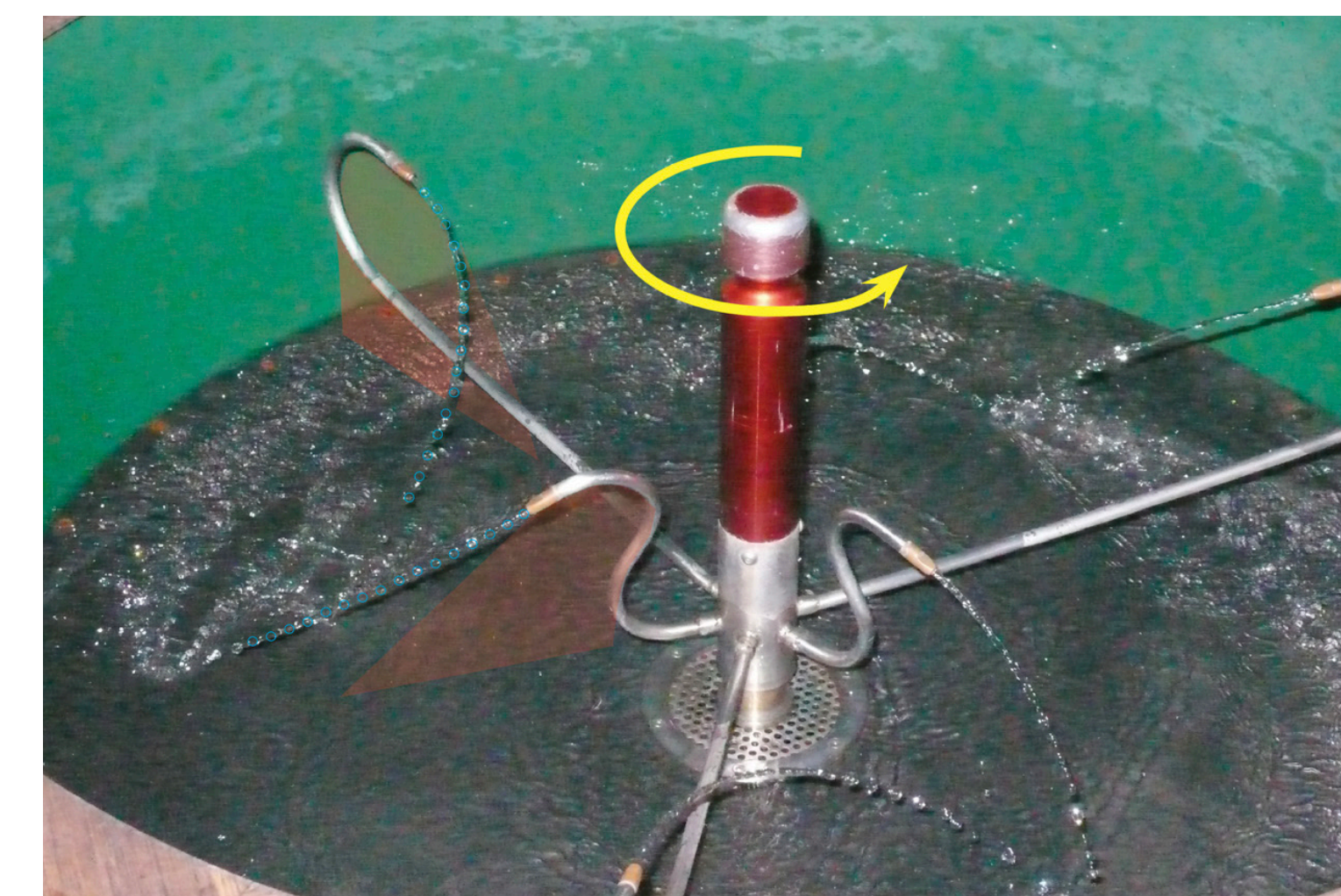
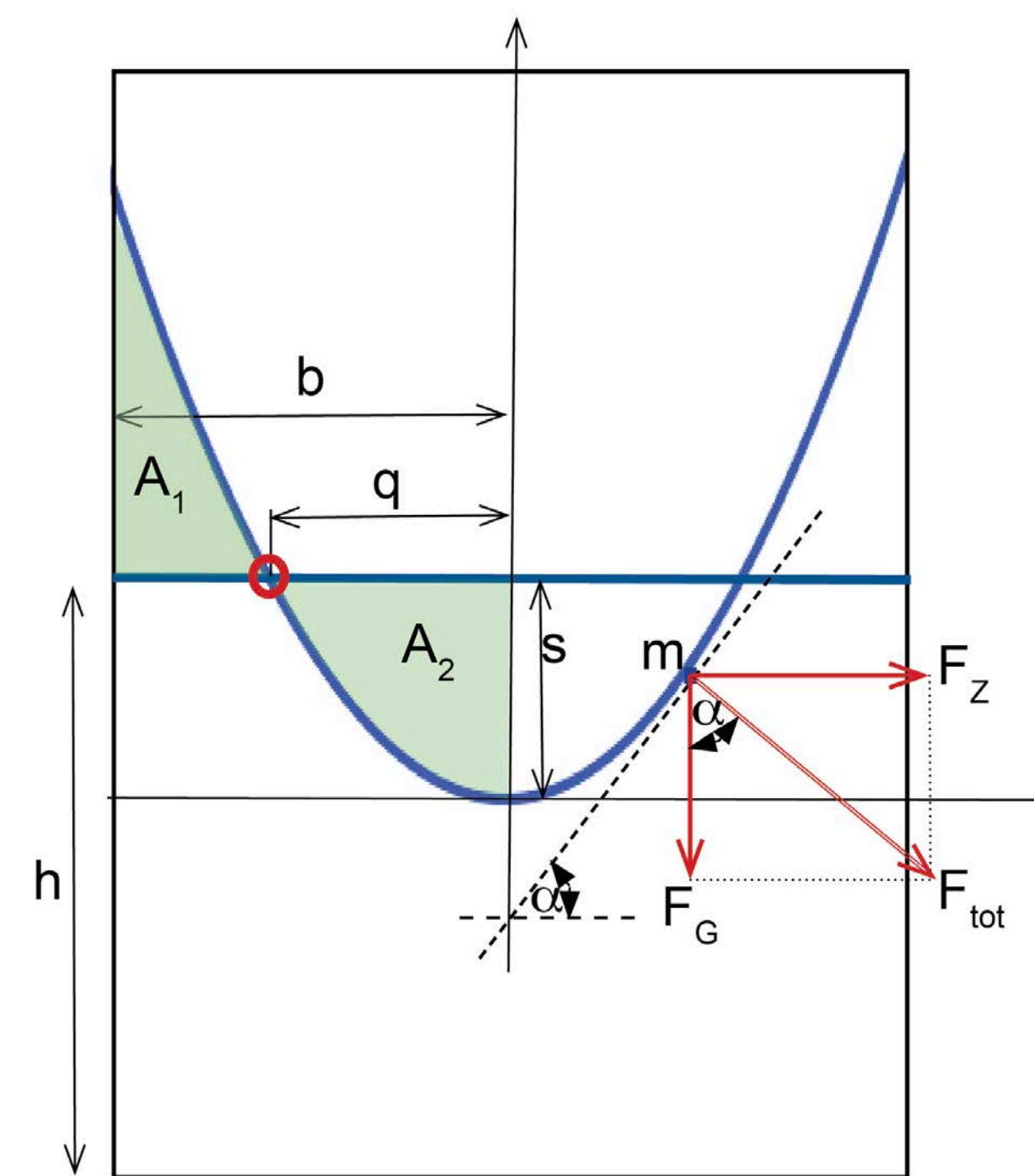


# Schöne Experimente



beschrieben von  
Prof. Dr. M. Ziegler

# 1. Rotierende Flüssigkeiten

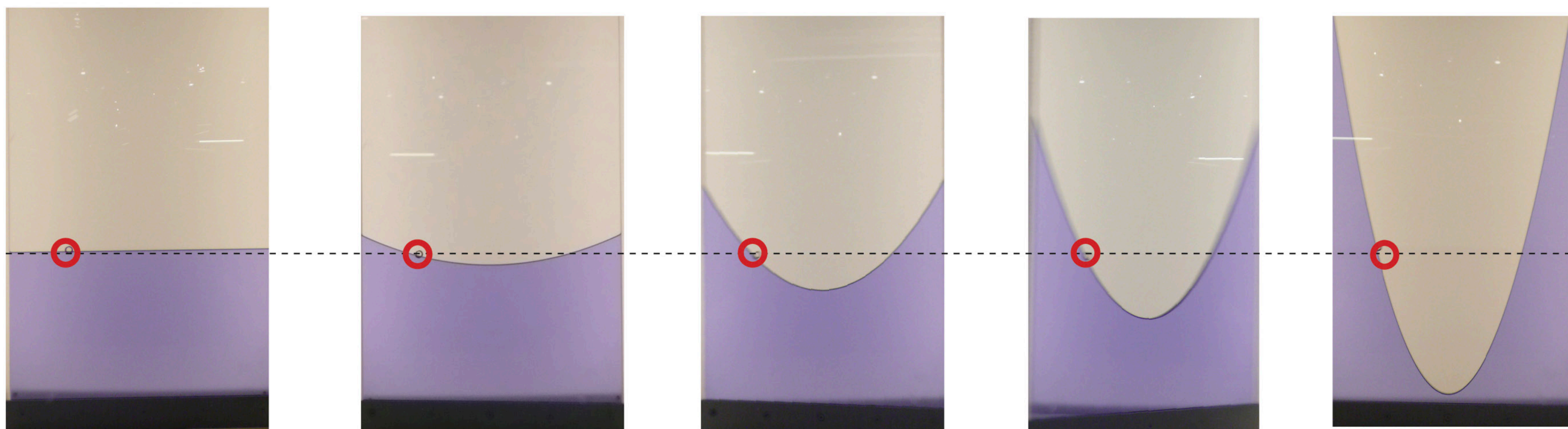
Jedes Flüssigkeitsmolekül an der Oberfläche erfährt zwei Kräfte:

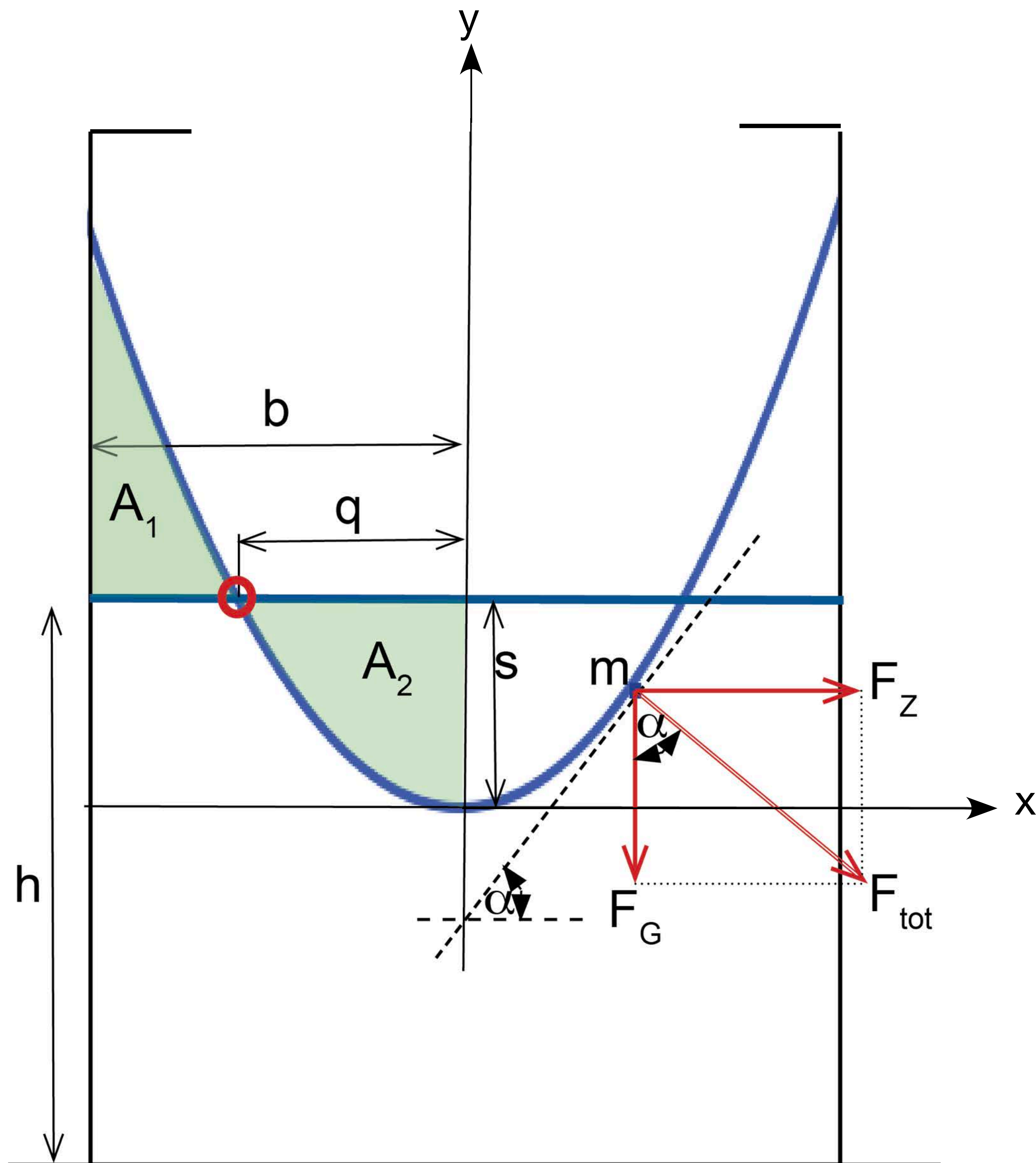
- die Gewichtskraft und
- die Zentrifugalkraft (Trägheitskraft)

Die Summe dieser beiden Kräfte steht immer senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche.

Die Flüssigkeitsmenge über dem Einfüllniveau ist immer gleich gross wie die fehlende Flüssigkeit unter dem Einfüllniveau.







**Annahme:**

Die Flüssigkeitsoberfläche habe Parabelform  
 $y = px^2$      $y' = 2px$

$$\text{tg } \alpha = y' = 2px$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= F_Z / F_G \\ &= mx\omega^2 / mg \\ &= x\omega^2 / g \end{aligned}$$

$$2px = x\omega^2 / g$$

$$p = \omega^2 / 2g$$

$$y = \omega^2 / 2g x^2$$

### Mathematische Betrachtung:

Gleiche Wassermenge über und unter dem Anfangsniveau:

$$A_1 = A_2$$

$$\int_q^b px^2 dx - (b - q)s = sq - \int_0^q px^2 dx$$

$$1/3 pb^3 - 1/3 pq^3 - bs + qs = qs - 1/3 pq^3$$

$$1/3 pb^3 = bs$$

$$p = 3s / b^2$$

$$y = 3s / b^2 x^2$$

---

### Spezialfälle:

a)  $y = s$   
 $s = 3s/b^2$   
 $x = b/\sqrt{3} = q$

-> q ist weder von s noch von  $\omega$  abhängig

b)  $s(\omega) = ?$   
 $\omega^2 / 2g = 3s / b^2$

$$s = \omega^2 b^2 / 6g$$

c)  $\omega_{\max} = ?$

$$h = \omega_{\max}^2 b^2 / 6g$$

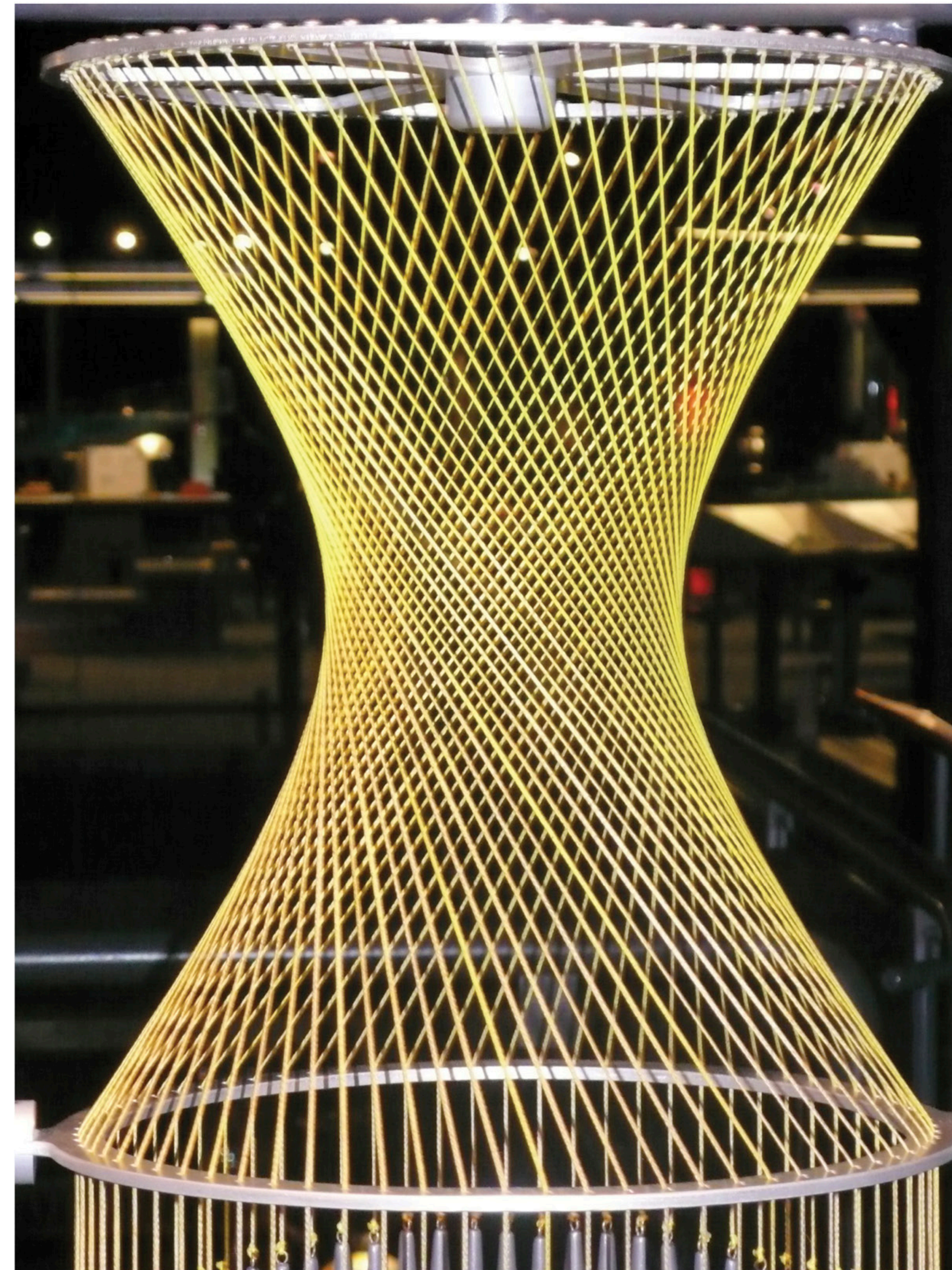
$$\omega_{\max} = \sqrt{6gh} / b$$

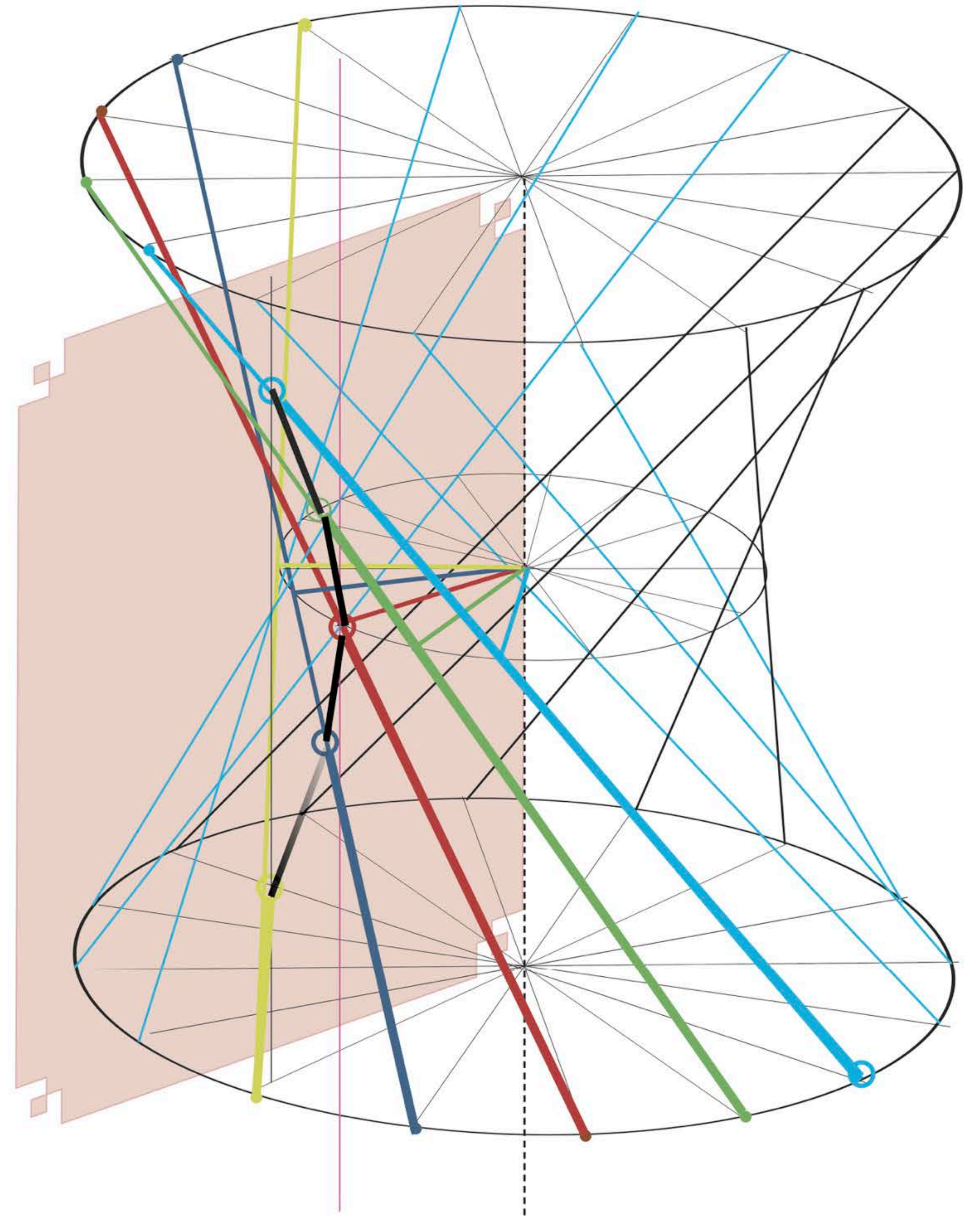
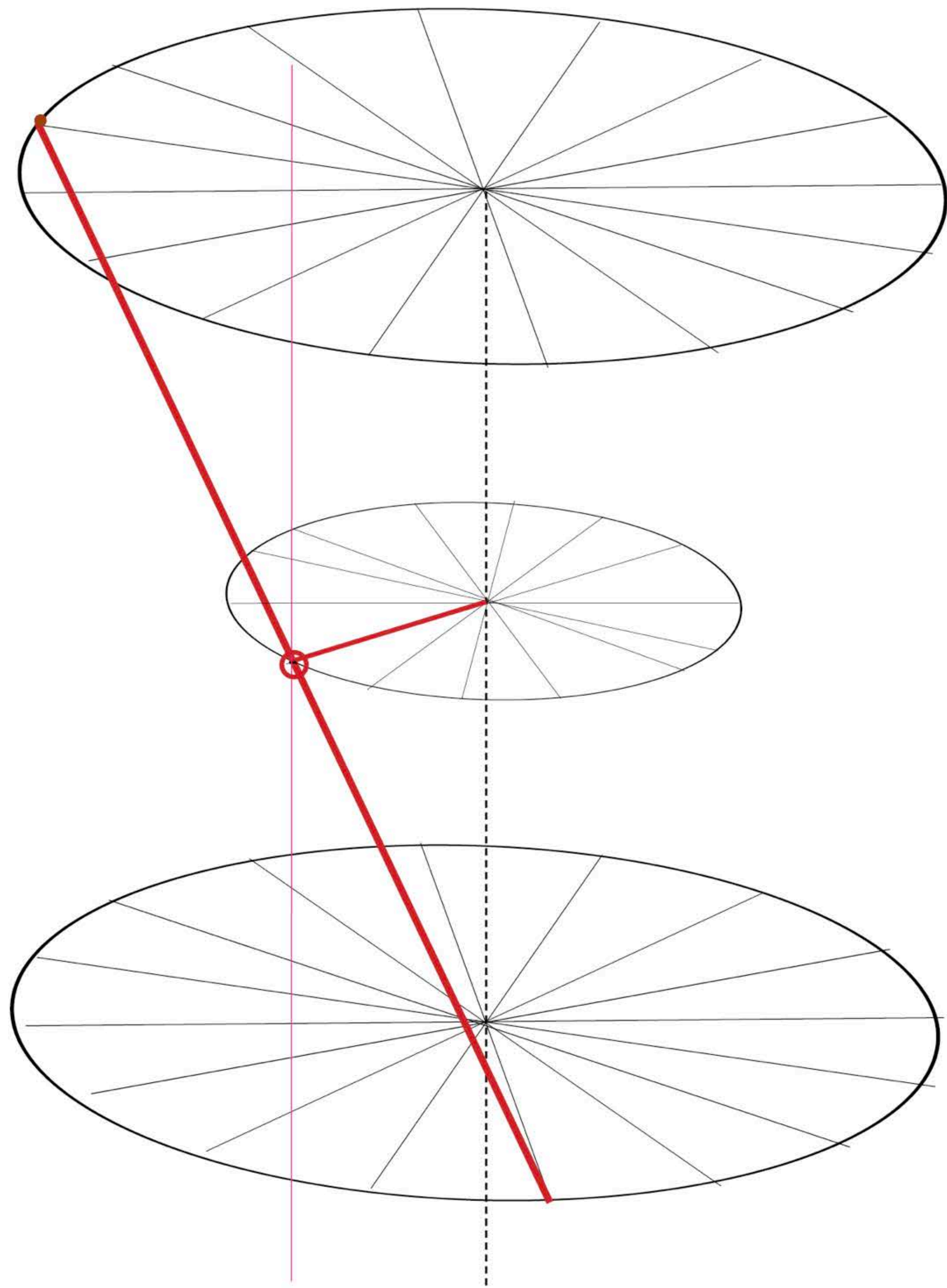
## 2. Hyperboloide

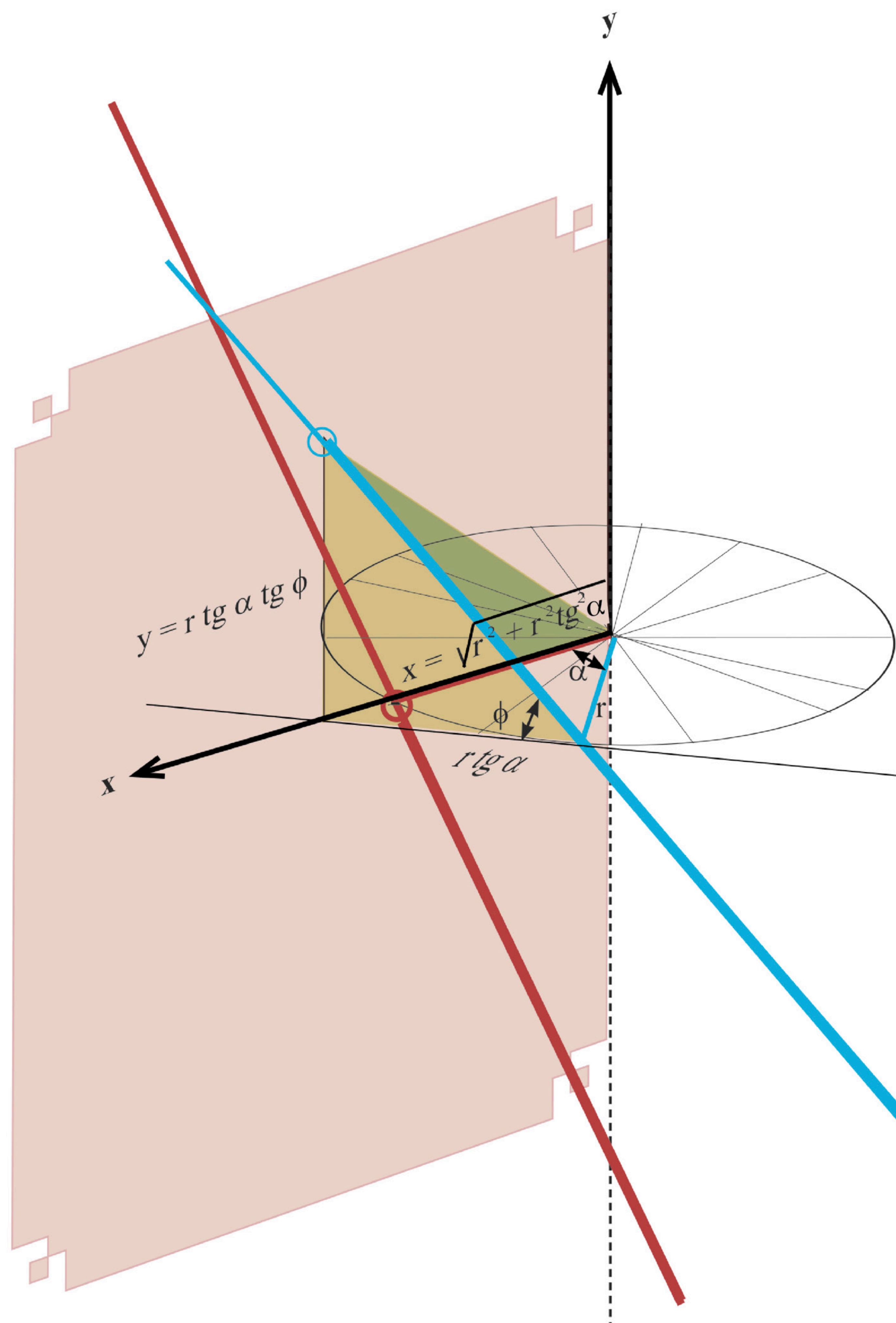
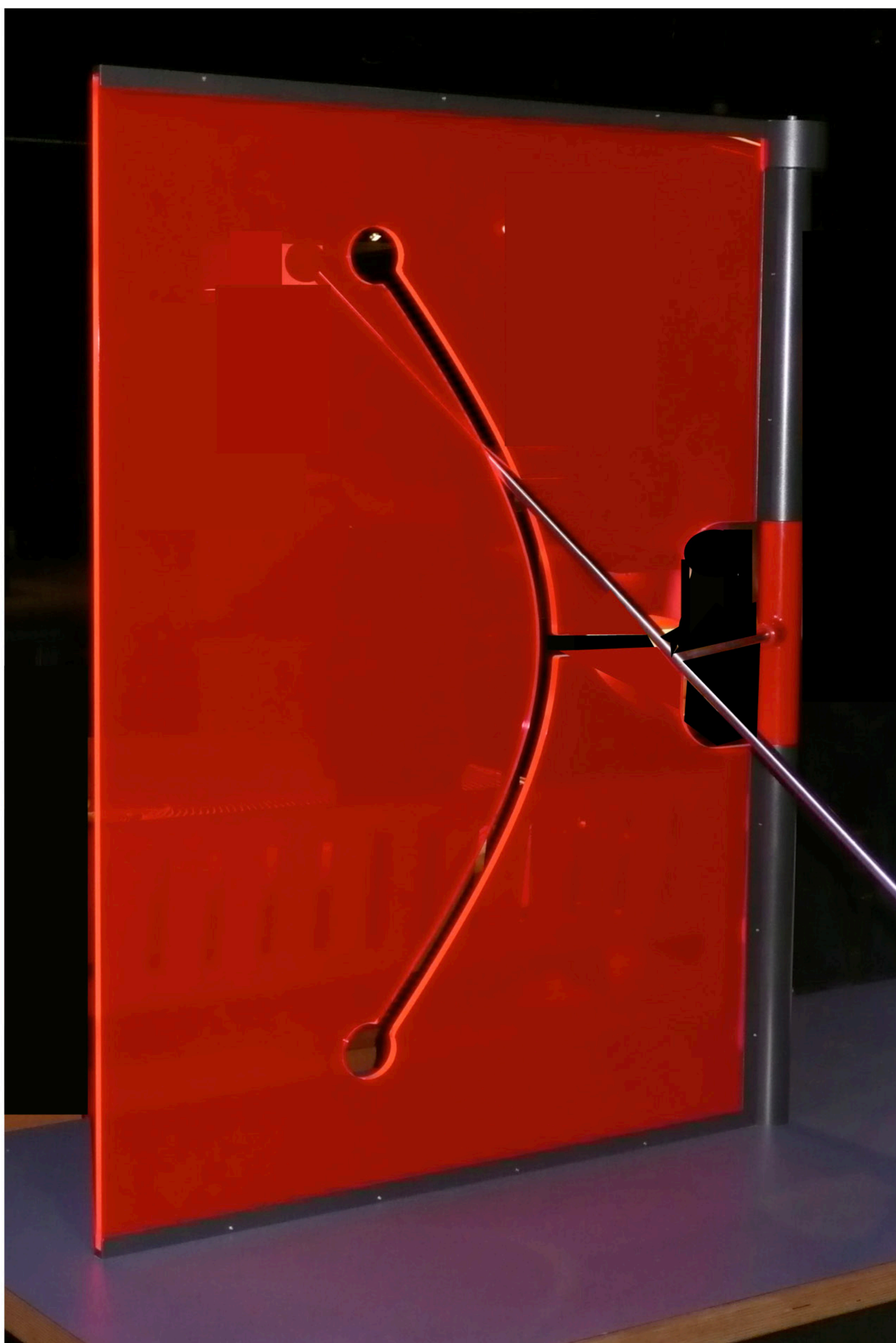
Wird eine windschiefe Gerade um ihren Partner rotiert, so entsteht ein Hyperboloid.

Schneiden wir die Hüllkurve mit einer Ebene in der die Rotationsachse liegt, so entsteht eine Hyperbel.

Hyperboloide finden auch in der Technik häufig ihre Anwendung --> Zahnräder









$$y = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \phi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = y / \operatorname{tg} \phi$$

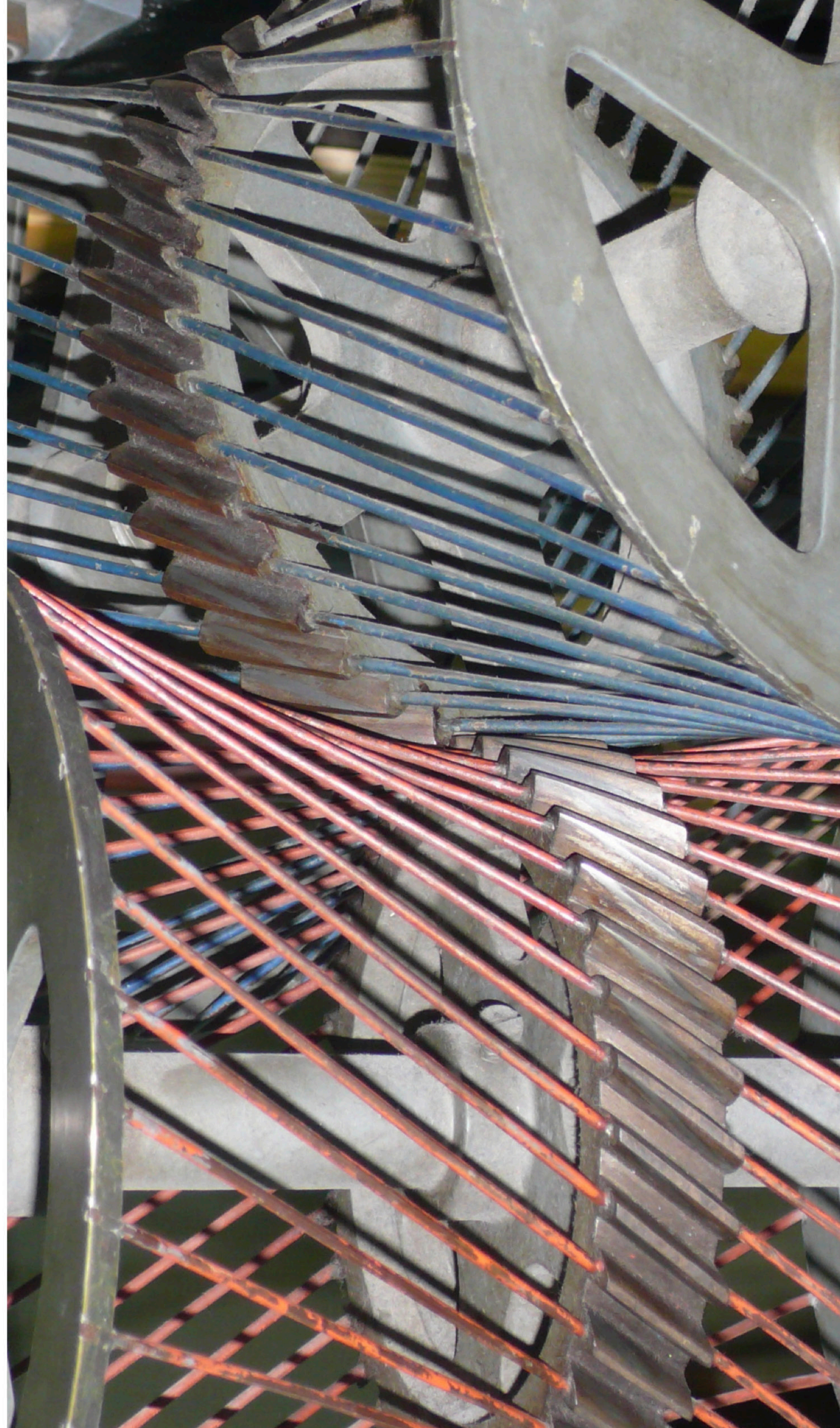
$$x = r \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2}$$

$$x^2 = r^2 [1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2]$$

$$x^2 = r^2 [1 + y^2 / r^2 \operatorname{tg}^2 \phi]$$

$$\frac{x^2 / r^2 - y^2 / r^2 \operatorname{tg}^2 \phi}{1} = 1$$

Hyperbelgleichung



### 3. Stöße mehrerer Pendel

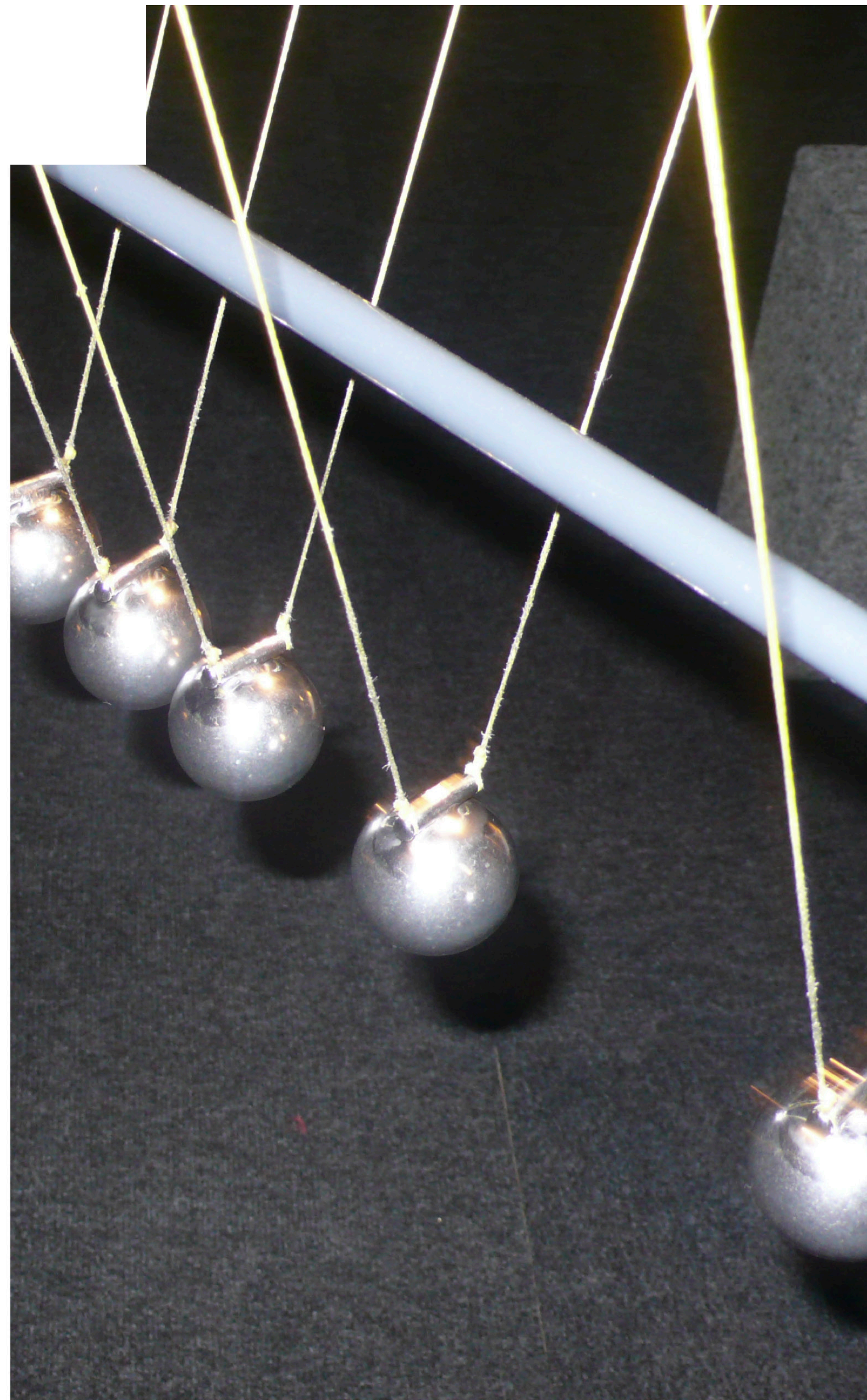
#### Stöße mehrerer Pendel Dynamische Analyse

Treffen zwei oder mehr Pendel aufeinander, so genügen die beiden Erhaltungssätze nicht, um das Resultat vorherzusagen. Bekannt ist dass beim Auslenken von zwei resp. drei Pendeln immer auch zwei resp. drei Pendel ausgelenkt werden und die anderen Pendel ruhen.

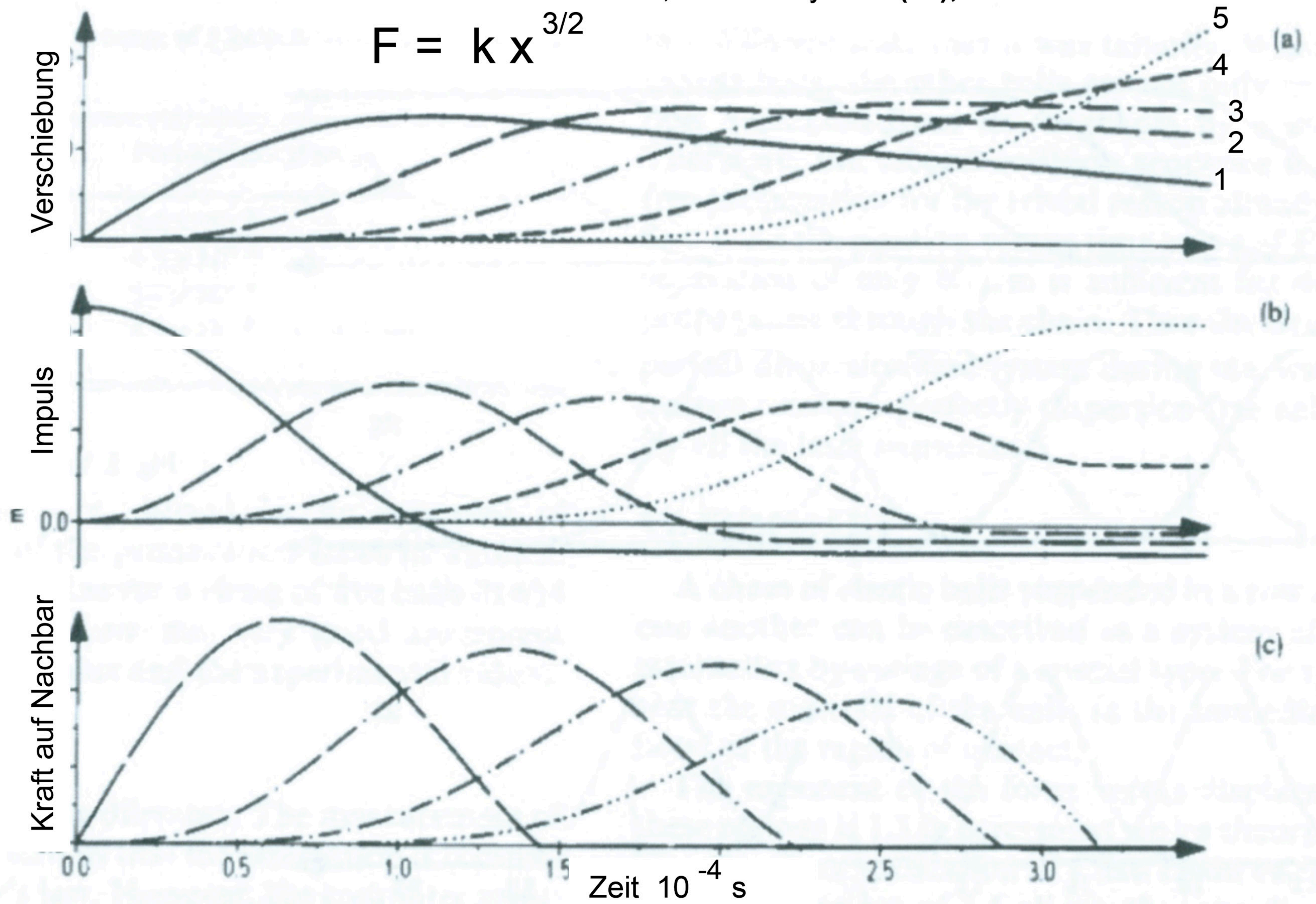
Dies ist nur dann der Fall, wenn die Pendelkörper so beschaffen sind, dass ein ganz spezielles Kraftgesetz gilt. Das ist für Stahlkugeln erfüllt.

Diese Einsicht hatte schon Heinrich Hertz im 19. Jh. (s. nebenstehenden Artikel)

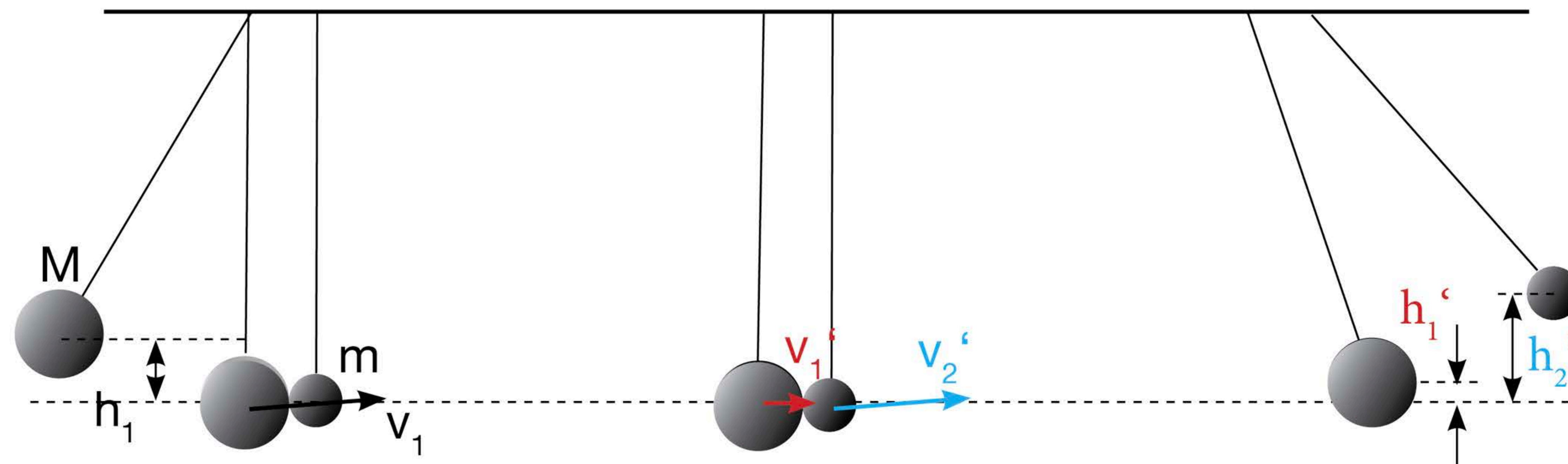
Diesen Sachverhalt konnten F. Hermann und M. Seitz in einer Computersimulation für fünf Kugeln 1982 nachweisen.



Aus: How does the ball-chain work? F.Hermann and M Seitz, Am. J. Phys. **50 (11)**, Nov 1982



## 2 Pendel



Energiesatz:

$$I. \quad Mgh_1 = Mgh_1' + mgh_2'$$

$$Mgh_1 = \frac{1}{2} mv_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$Mgh_1' = \frac{1}{2} Mv_1'^2$$

$$v_1' = \sqrt{2gh_1'}$$

$$mgh_2' = \frac{1}{2} mv_2'^2$$

$$v_2' = \sqrt{2gh_2'}$$

Substitution:

$$m/M = \mu$$

$$h_1 = h_1' + \mu h_2'$$

---

$$M\sqrt{2gh_1} = M\sqrt{2gh_1'} + m\sqrt{2gh_2'} \quad /:M/2$$

$$h_1 = h_1' + \mu h_2'$$

---

$$2gh_1 = 2gh_1' + \mu^2 2gh_2' + 2\mu\sqrt{2gh_1'}\sqrt{2gh_2'}$$

$$h_1 = h_1' + \mu h_2' \quad /einsetzen$$

---

$$h_1 - h_1' = \mu^2 h_2' + 2\mu\sqrt{h_1' h_2'}$$

---

$$h_1' + \mu h_2' - h_1' - \mu^2 h_2' = 2\mu\sqrt{h_1' h_2'}$$

$$h_1 = h_1' + \mu h_2'$$

---

$$(1-\mu)\mu h_2' = 2\mu\sqrt{h_1' h_2'} \quad /2$$

$$h_1 = h_1' + \mu h_2'$$

---

$$(1-\mu)^2 h_2' = 4h_1'$$

---

$$(1-\mu)^2 h_2' = 4(h_1 - \mu h_2')$$

$$h_2'(1-2\mu + \mu^2 + 4\mu) = 4h_1'$$
$$h_2'(1+\mu)^2 = 4h_1'$$

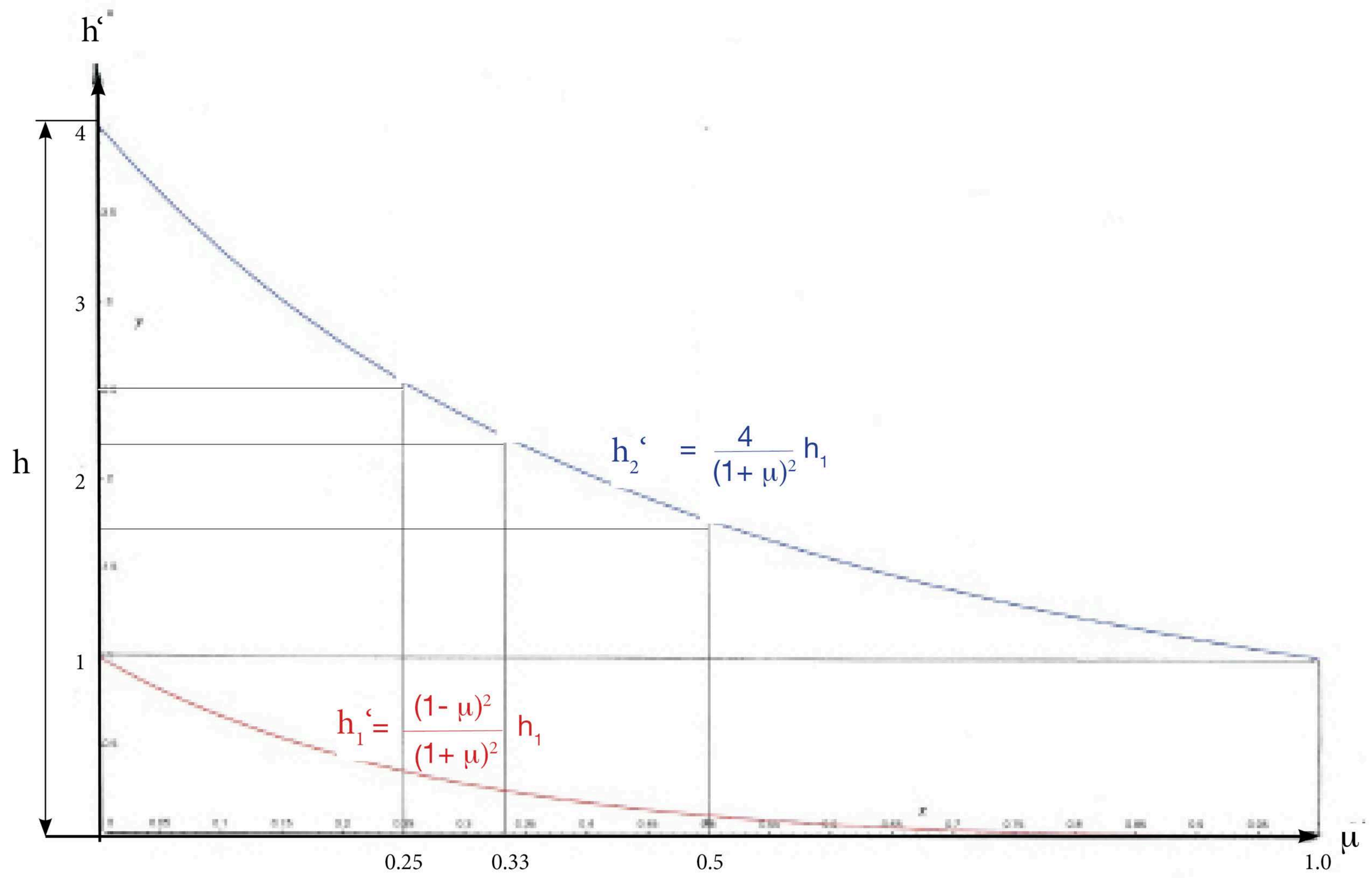
$$h_2' = \frac{4}{(1+\mu)^2} h_1'$$

---

$$h_1 = h_1' + \mu \frac{4}{(1+\mu)^2} h_1'$$

$$h_1' = \frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2} h_1$$

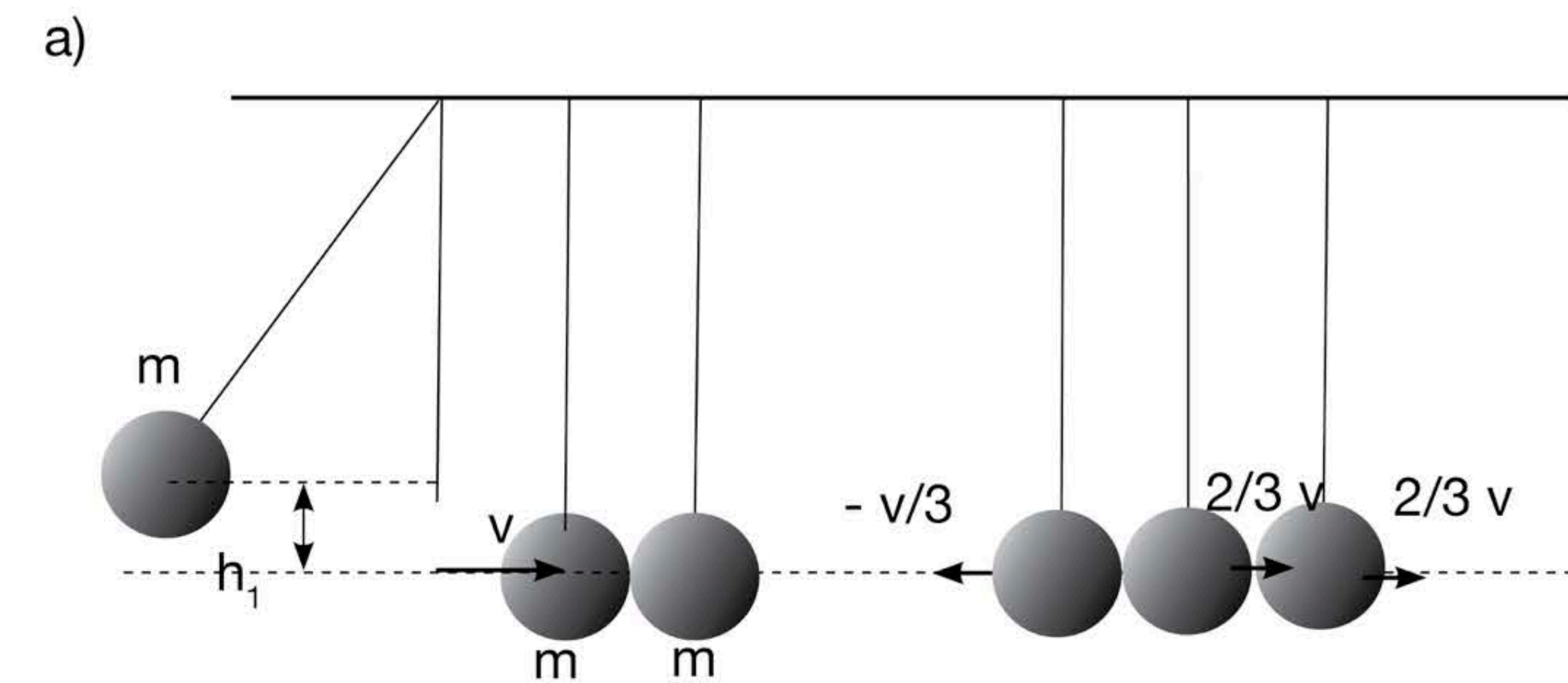
---



### 3 Pendel

Stößt ein Pendel auf zwei ruhende Pendel.  
so kann das Resultat verschieden aussehen.

a) Zwei ruhenden Pendel werden mit der  
halben Geschwindigkeit des auftreffenden  
Pendels ausgelenkt und dieses mit der  
halben Geschwindigkeit zurückgeworfen.



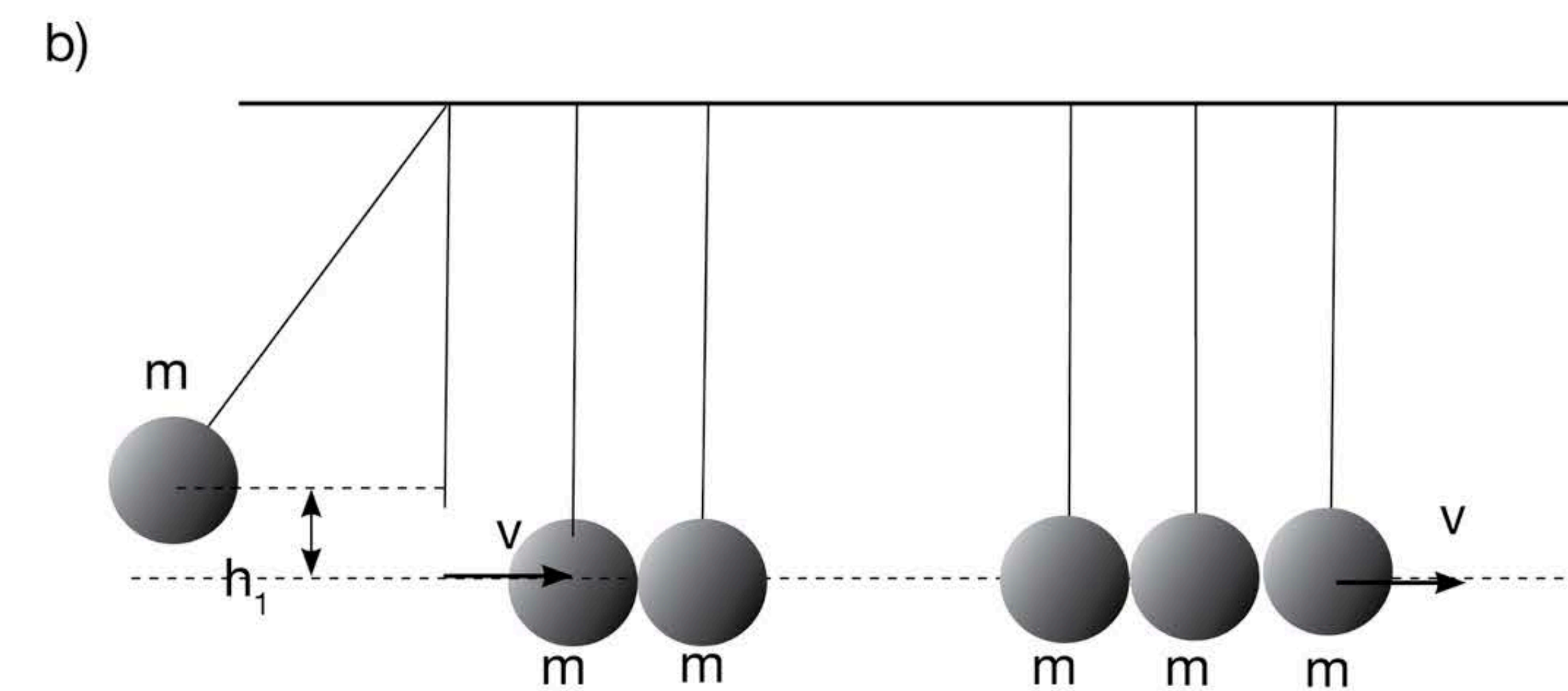
Impulssatz:

$$mv \stackrel{?}{=} -m \frac{1}{3} v + m \frac{2}{3} v + m \frac{2}{3} v \quad \checkmark$$

$$\text{Energiesatz: } \frac{1}{2} mv^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{2}{3} v\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{2}{3} v\right)^2 \quad \checkmark$$

Die Erhaltungssätze sind erfüllt !

b) Von den zwei ruhenden Pendel wird nur  
ein Pendel nach dem Stoss mit der  
Geschwindigkeit des stossenden Pendels  
ausgelenkt.



Impulssatz:

$$mv = m v \quad \checkmark$$

$$\text{Energiesatz: } \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad \checkmark$$

Die Erhaltungssätze sind erfüllt !

WAS GILT NUN?

# 4. Der Coriolisbrunnen

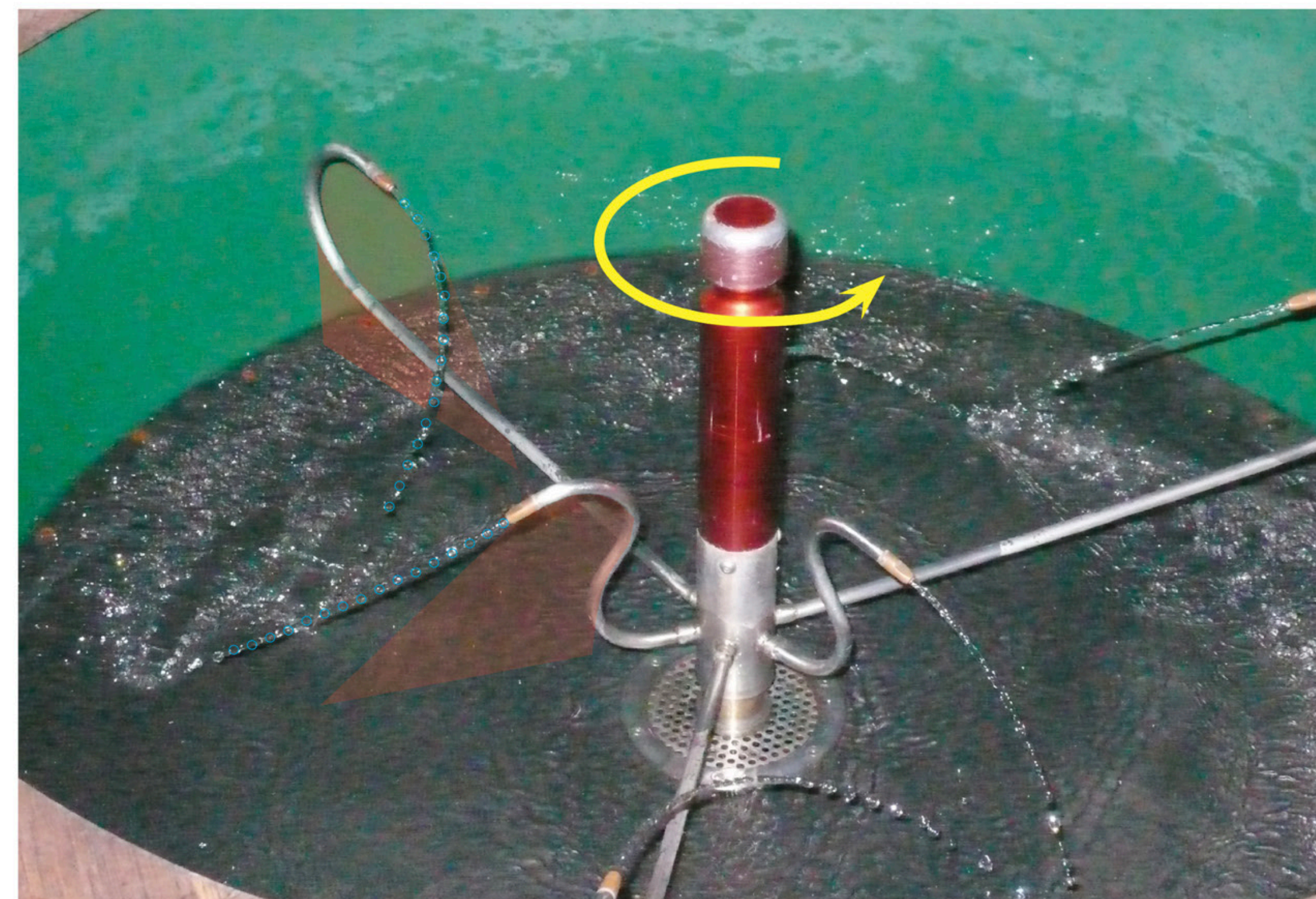
## Der Coriolis Brunnen

Reibungsfreie Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem.

In einem Inertialsystem (Koordinatensystem das keine Beschleunigung erfährt) bewegt sich ein Körper geradlinig gleichförmig, oder er ruht. **(1. Newton'sches Axiom)**

Die Wassertropfen einer ruhenden Sprinkleranlage bewegen sich horizontal mit konstanter Geschwindigkeit. Es wirkt in dieser Richtung keine Kraft. (Die Gewichtskraft zwingt die Wassertropfen auf eine Parabelbahn. (s. Figur rechts oben)

Wird die Sprinkleranlage in Drehung versetzt, (s. Figur rechts unten) so scheinen die Wassertropfen seitlich abgelenkt zu werden. Ein Effekt, der in allen rotierenden Bezugssystemen auftritt. Die Ablenkung scheint von einer mysteriösen Kraft her zu rühren. In Wirklichkeit wirkt keine Kraft. Sie wird uns im rotierenden System vorge täuscht, es ist eine sog. Scheinkraft. Man nennt sie nach dem Erfinder **Corioliskraft**.





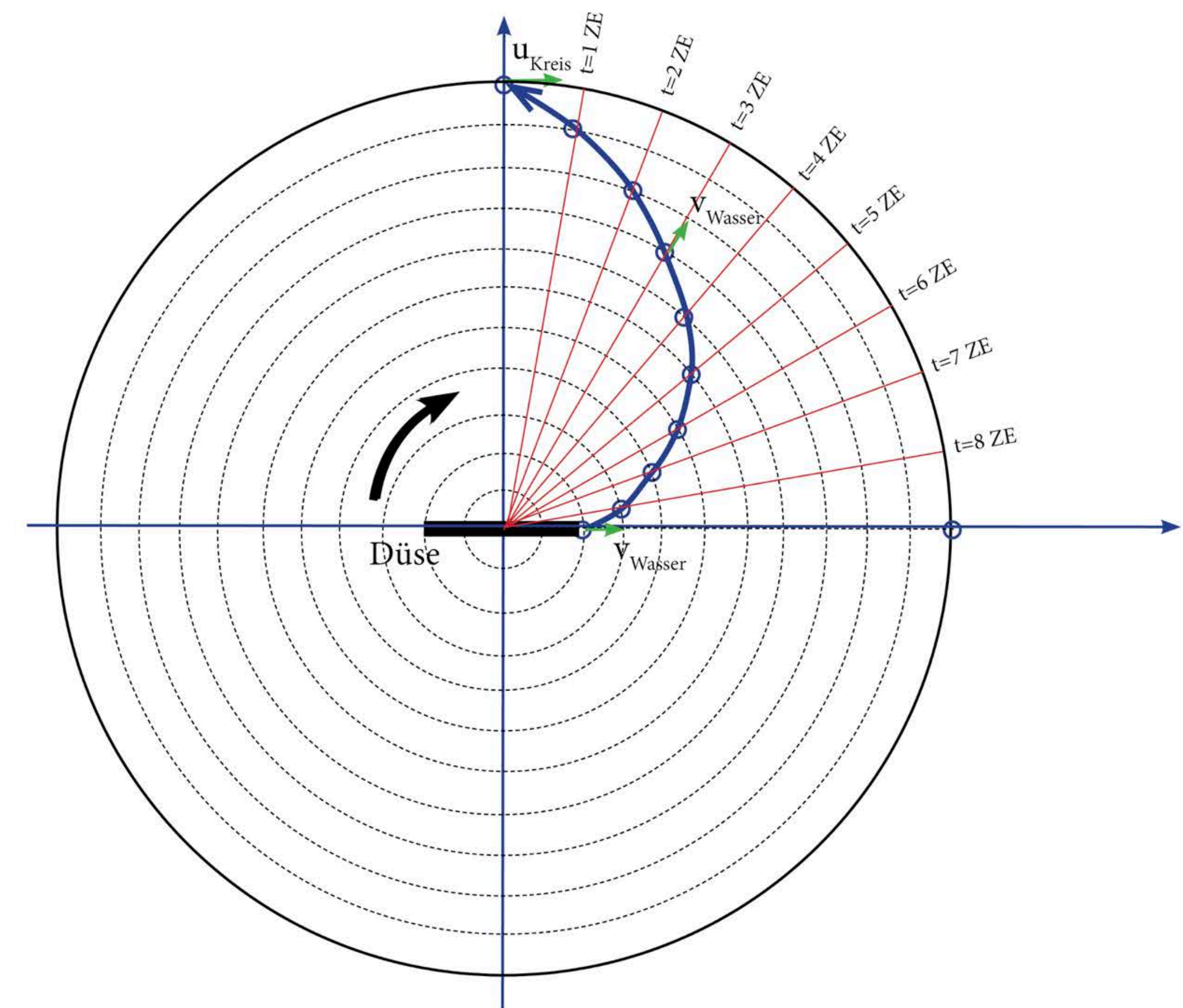
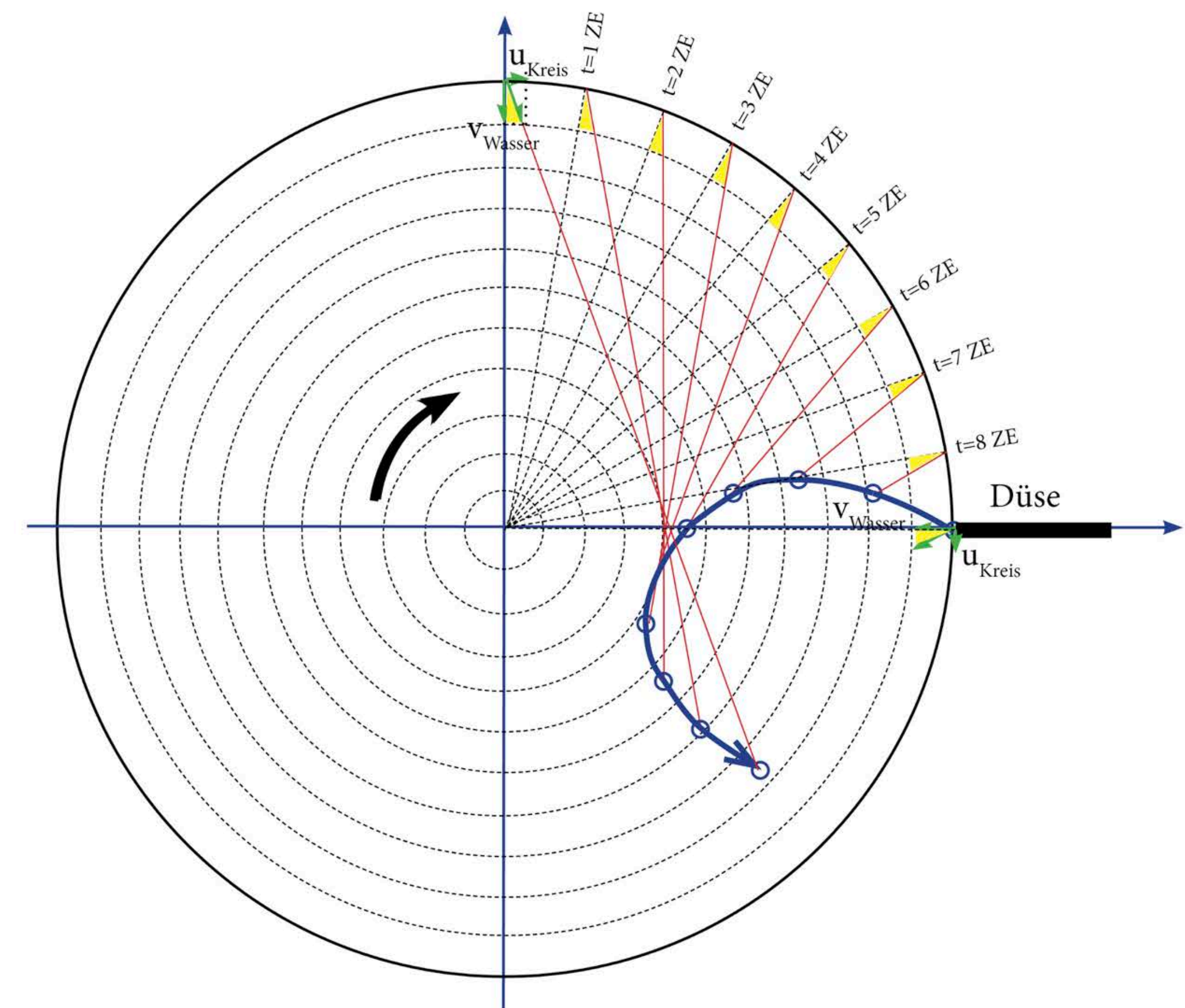
Die roten Linien geben die Wege einzelner Wassertropfen zu verschiedenen Zeiten an.

**Wasserstrahl von aussen nach innen:**

Das Wassertröpfchen das zur Zeit 0 (0.ZE) die Düse verlässt hat relativ zum ruhenden Bezugssystem die Ausströmgeschwindigkeit  $v_{\text{Wasser}}$  und die Geschwindigkeit  $u_{\text{Kreis}}$  von der rotierenden Scheibe. Es bewegt sich geradlinig gleichförmig (Fallbewegung vernachlässigt) entlang der roten Linie. Eine Zeiteinheit später wird bei  $t = 1$ . ZE ein neuer Tropfen ausgesandt, der sich entlang der zweiten roten Linie bewegt,..... usw. Die blaue Linie zeigt das Ensemble der Tropfen nach 10 Zeiteinheiten. Der Wasserstrahl scheint der Düse voranzueilen, weil sich die Scheibe innen langsamer dreht. Eine Kraft scheint den Wasserstrahl nach links abzulenken.

**Wasserstrahl von innen nach aussen:**

Die Wassertropfen bewegen sich in gleichen Zeitabständen radial, gleichförmig gegen aussen. Auch hier zeigt die blaue Kurve den Wasserstrahl nach der Zeit  $t = 10$  ZE. Der Wasserstrahl ist nach links gebogen, weil sich weiter aussen die Scheibe schneller bewegt. Es scheint eine Kraft diese Tropfen nach links abzulenken.



## 5. Bewegung auf rotierendem Untergrund

Wird eine Kugel auf einem Drehtisch der mit der Frequenz  $\omega_t$  rotiert so gehalten, dass sie durch die Reibung eine angepasste Rotationsfrequenz  $\omega_k$  erhält, so bleibt sie an Ort.

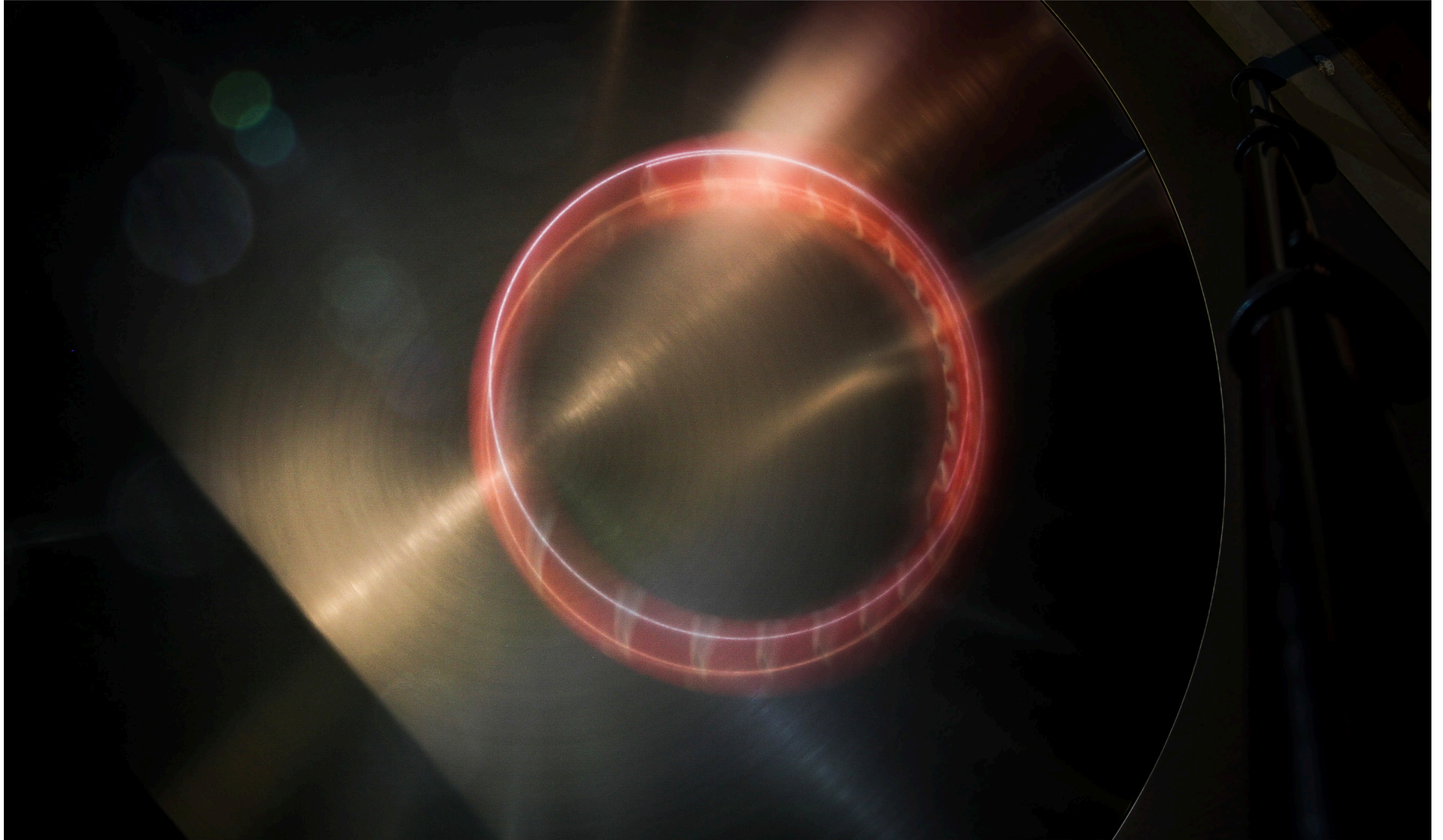
Wird die Kugel nun ganz leicht in Richtung des Drehtischzentrums angestossen so vollführt sie eine Kreisbahn mit dem Radius  $r$ . Die Frequenz der Kreisbewegung  $\omega_k$  ist unabhängig von Bahnradius, Kugelmasse  $m$  und Kugelradius  $R$ .

Die Kreisfrequenz einer vollen Kugel beträgt  $\omega_k = 2/7 \omega_t$  und die einer Hohlkugel beträgt  $\omega_k = 2/5 \omega_t$

Ein sich mit der Scheibe mitdrehender Beobachter sieht eine wesentlich kompliziertere Bahn der Kugel und vermutet die Wirkung einer Kraft, deren Ursprung er nicht ergründen kann. Es ist dies eine Scheinkraft, die sog. Corioliskraft die immer in rotierenden Bezugssystemen auftritt.

Die Bewegung der Kugel im festen Koordinatensystem (Inertialsystem) lässt sich mit der Dynamik des starren Körpers berechnen. (s. Klaus Weltner, Am. J. Phys. 47(11) Nov. 1979 )





## Berechnung der Bahn

Referenzsystem ist das Inertialsystem des Beobachters.

Bezeichnungen: (s. Fig.)

$r$  : Kugelradius

$\omega_k$  : Winkelgeschwindigkeit der Kugel

$R$  : Kugelzentrum - Berührungspunkt

$\omega_t$  : Winkelgeschwindigkeit des Tisches

$r'$  : Kugelzentrum - Tischzentrum

$\rho$  : Kreisradius

$\omega_c$  : Winkelgeschwindigkeit Kreisbahn

Voraussetzung: Tischgeschwindigkeit = Kugelgeschwindigkeit beim Berührungspunkt (kein Gleiten)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_k \\ \omega_t \times \mathbf{R} &= \dot{\mathbf{R}} + \omega_k \times \mathbf{r} \\ \omega_k \times \mathbf{r} &= -\dot{\mathbf{R}} + \omega_t \times \mathbf{R} \quad \text{neuordnen, differenzieren} \end{aligned}$$

Beim Berührungspunkt wirkt die Reibungskraft  $\mathbf{F}$ . Diese Kraft beschleunigt die Kugel als Ganzes, also:

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{R}} \quad (2. \text{ NA})$$

Die Ableitung des Drehimpulses ( $\dot{\mathbf{L}}$ ) entspricht dem Drehmoment ( $\mathbf{M}$ ) der Reibungskraft bezüglich des Massenzentrums.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = J \dot{\omega}_k = \mathbf{r} \times m \ddot{\mathbf{R}} \\ &= 1/J (\mathbf{r} \times m \ddot{\mathbf{R}}) \\ \left[ \frac{\mathbf{r}}{J} \times m \ddot{\mathbf{R}} \right] \times \mathbf{r} &= \omega_t \times \dot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}} \\ \left( \frac{r^2}{J} \right) m \ddot{\mathbf{R}} &= \omega_t \times \dot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \frac{\omega_t \times \dot{\mathbf{R}}}{\left( \frac{r^2}{J} \right) m + 1} \quad \text{Bewegungsgleichung} \end{aligned}$$

Beweis, dass die Kugel sich auf einem Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_c$  bewegt mit dem Radius  $\rho$ . Der Kreisradius wird durch die Anfangsbedingung bestimmt. Die Frequenz  $\omega_c$  berechnet sich nach dem Lösungsansatz:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \rho, \quad \dot{\mathbf{R}} = \omega_c \times \rho, \quad \ddot{\mathbf{R}} = -\omega_c^2 \rho$$

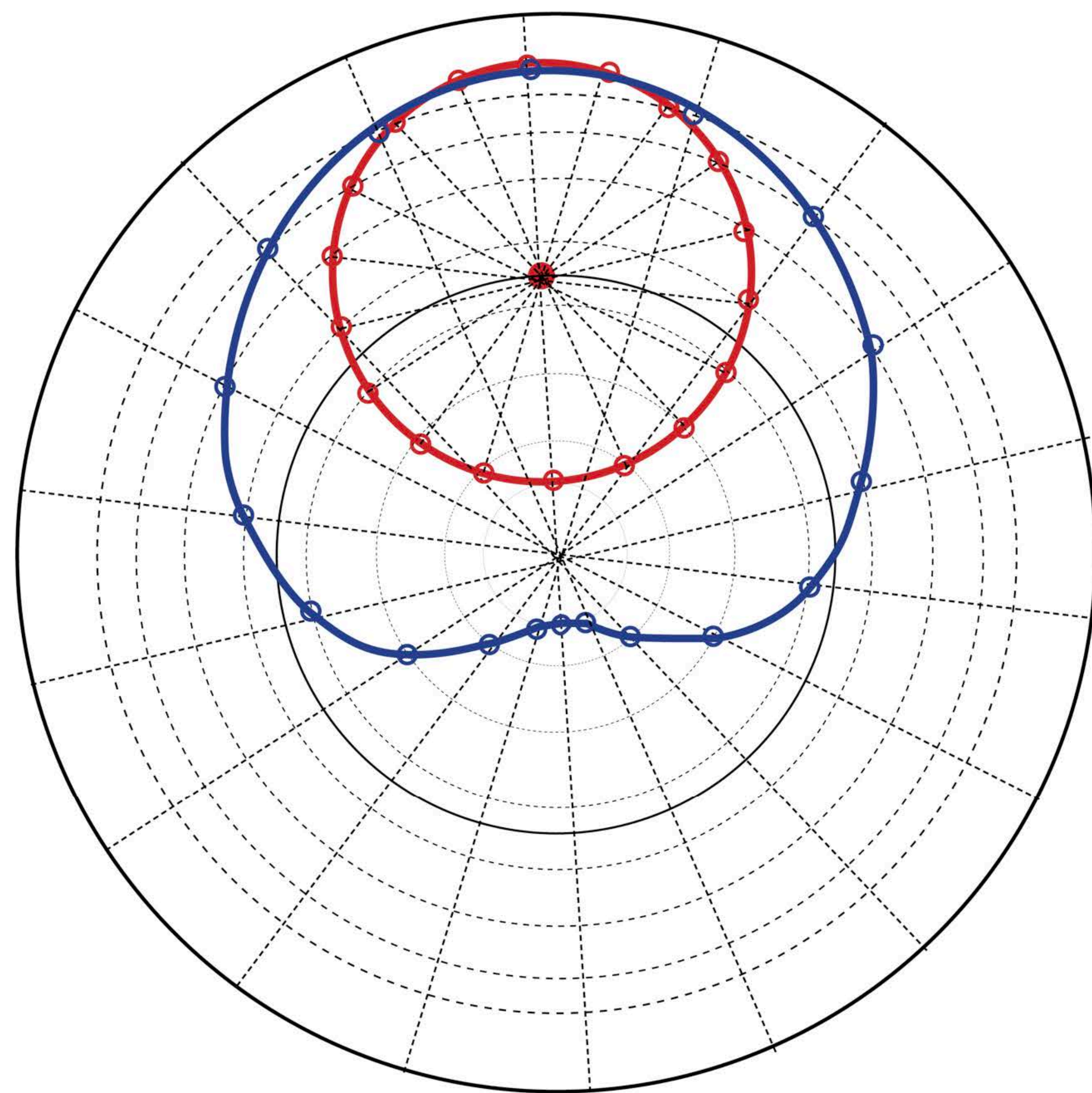
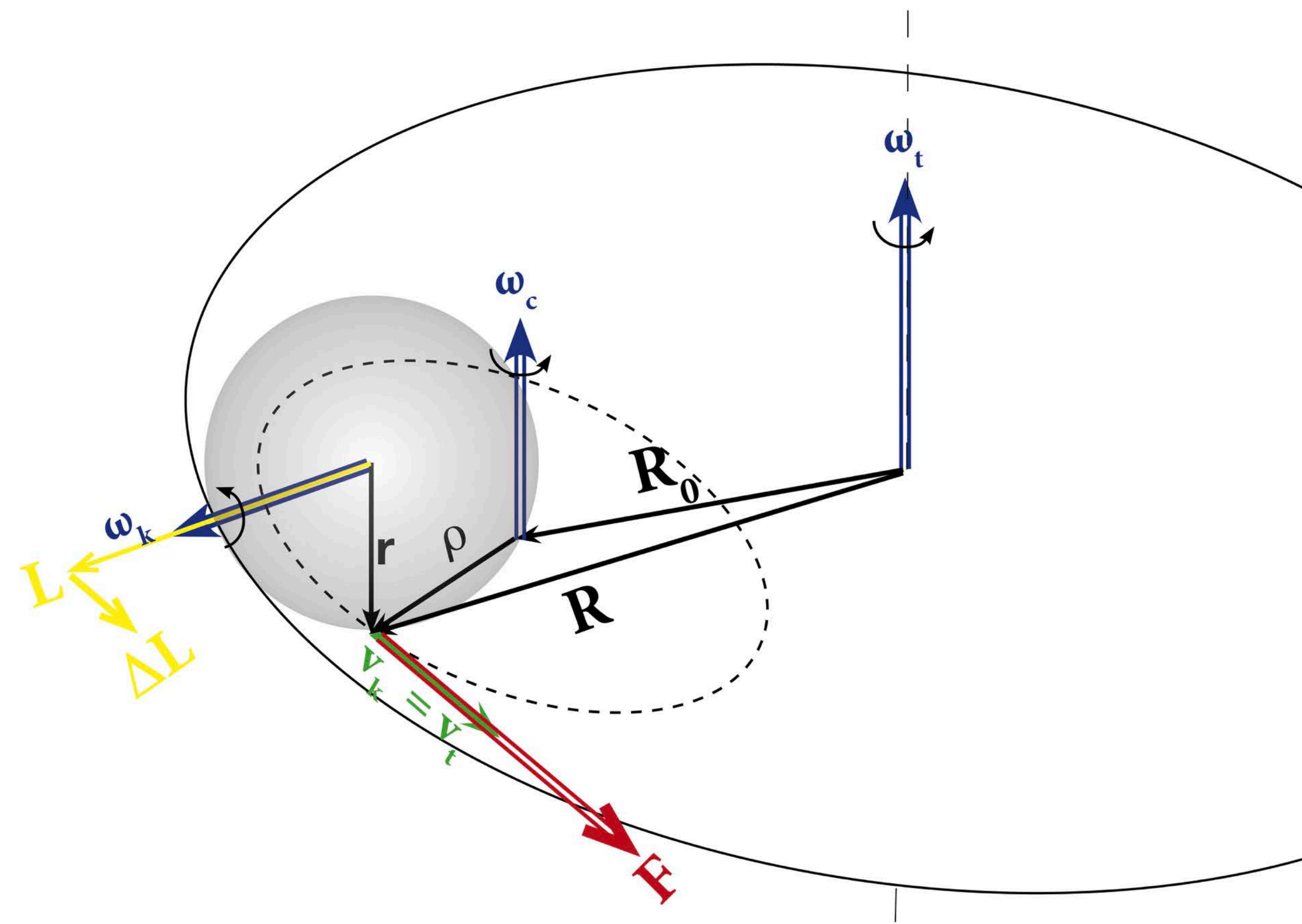
Durch Einsetzen:

$$\omega_c = \frac{\omega_t}{\left( \frac{r}{J} \right) m + 1}$$

$\omega_c$  ist unabhängig von  $r, m$  und  $\rho$ :

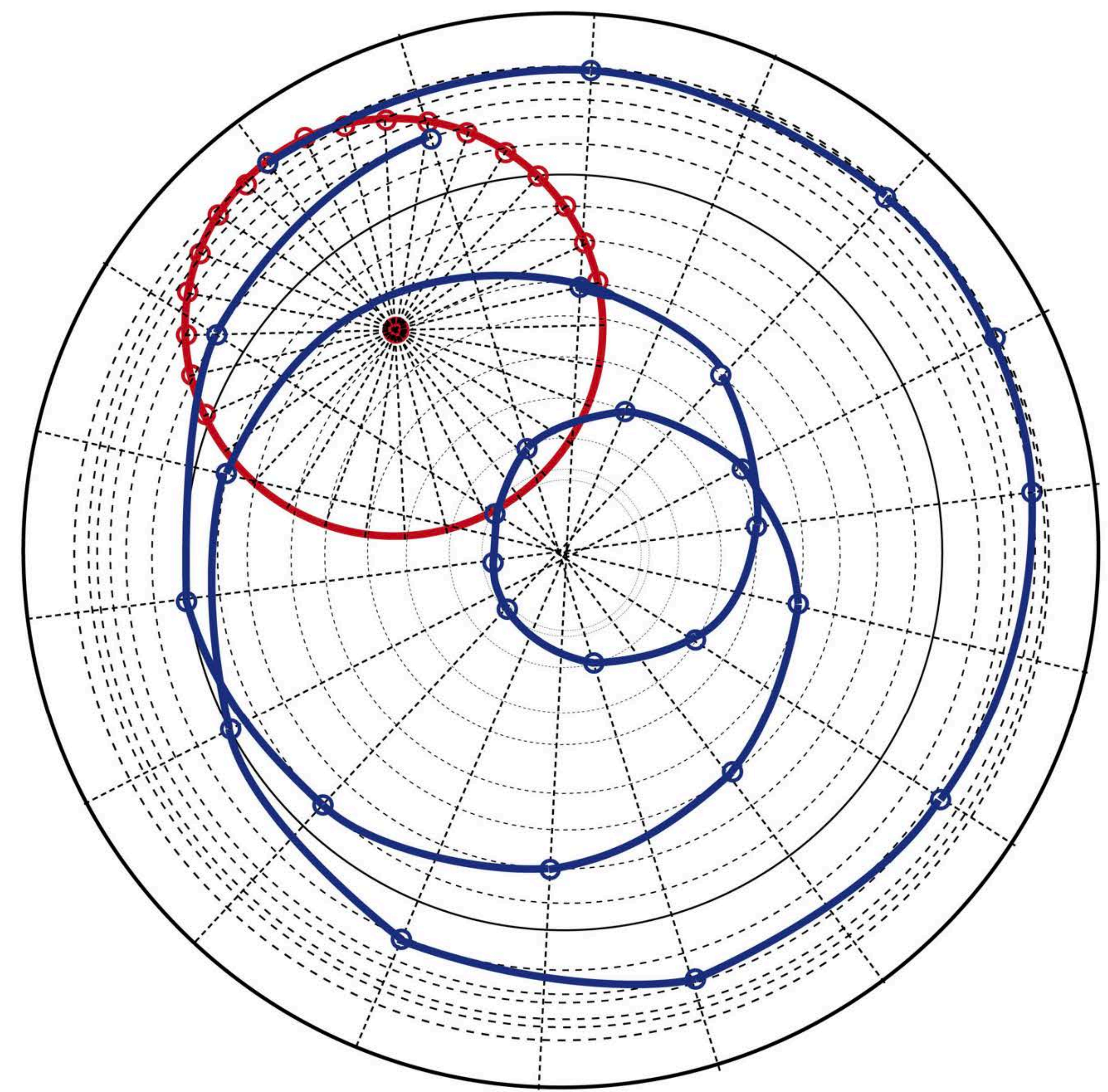
Für eine Vollkugel mit dem Trägheitsmoment  $J = 2/5 r^2 m$  ergibt sich:  $\rightarrow \omega_k = 2/7 \omega_t$

Für die dünne Hohlkugel mit dem Trägheitsmoment  $J = 2/3 m r^2$  ergibt sich:  $\rightarrow \omega_k = 2/5 \omega_t$



$$\omega_k = \omega_t$$

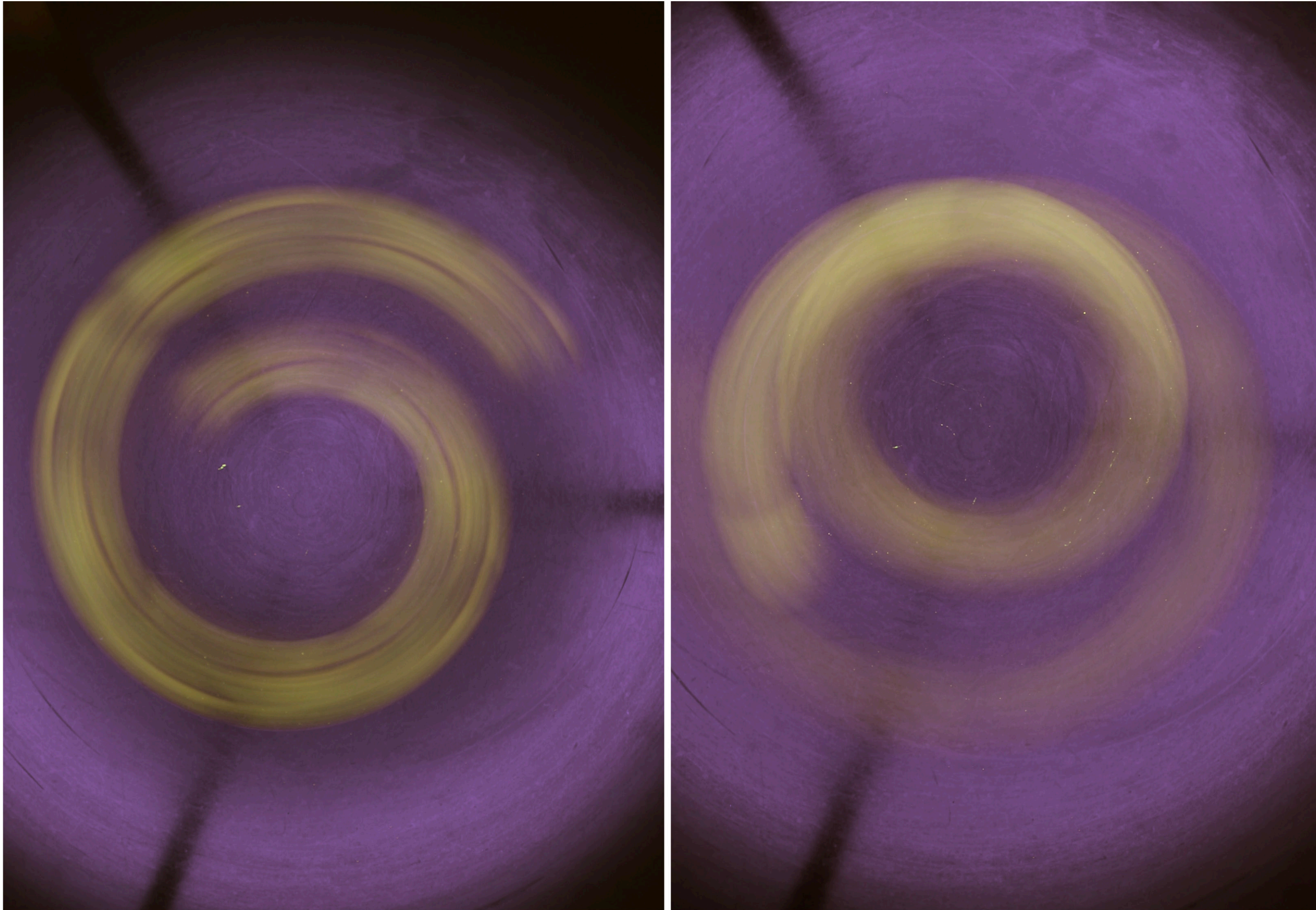
konstruierte Bahnen



Rot: Inertialsystem

Blau: Rotierende Scheibe

$$\omega_k = 0.25 \omega_t$$



Langzeitaufnahmen im rotierenden System

## 5. Beugung, Interferenz

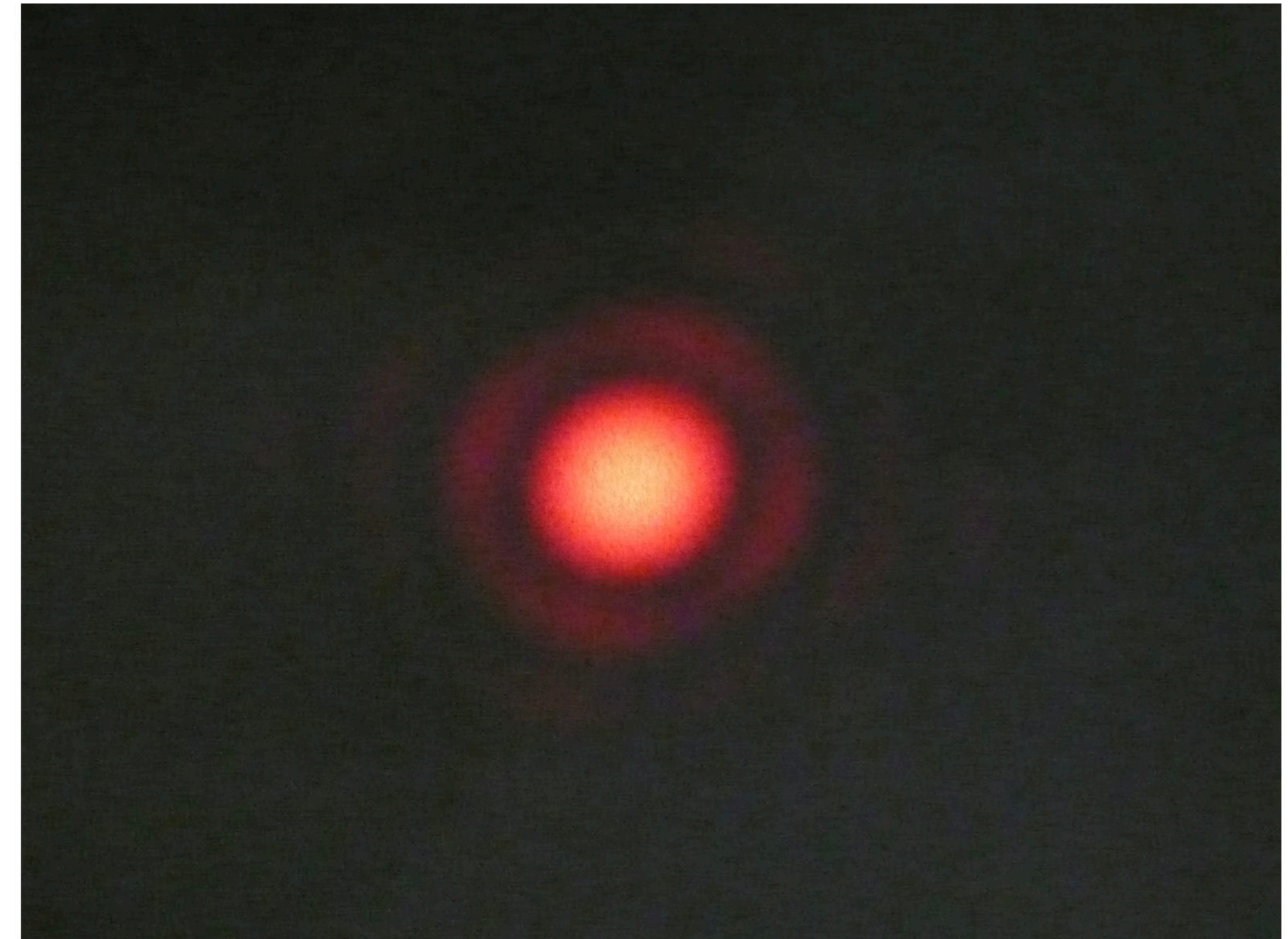
Wird monochromatisches Licht durch eine dünne Spalte geschickt, so offenbart es uns seine Wellennatur, es wird in den geometrischen Schatten gebeugt.

Aus dem Abstand des nullten- zum ersten Beugungsmaximum ( $x$ ), der Lichtwellenlänge ( $\lambda$ ) und dem Abstand Spalte-Schirm ( $D$ ) kann die Spaltbreite  $a$  berechnet werden nach:

$$2a \sin \varphi = \lambda \approx 2a \cdot x/D$$

Für kleine Lochblenden vom Durchmesser  $a$  ergibt sich eine leicht modifizierte Gleichung:

$$2a \sin \varphi = 1,22 \lambda$$



### a) Interferenz an der Doppelspalte

Treten zwei monochromatische, kohärente Wellen der Wellenlänge  $\lambda$  auf eine Doppelspalte vom Spaltenabstand  $d$ , so entsteht auf einem Auffangschirm im Abstand  $D$  ein Interferenzbild.

Die Wellen unterstützen sich dort, wo gilt:

$$d \sin \phi = z \lambda$$

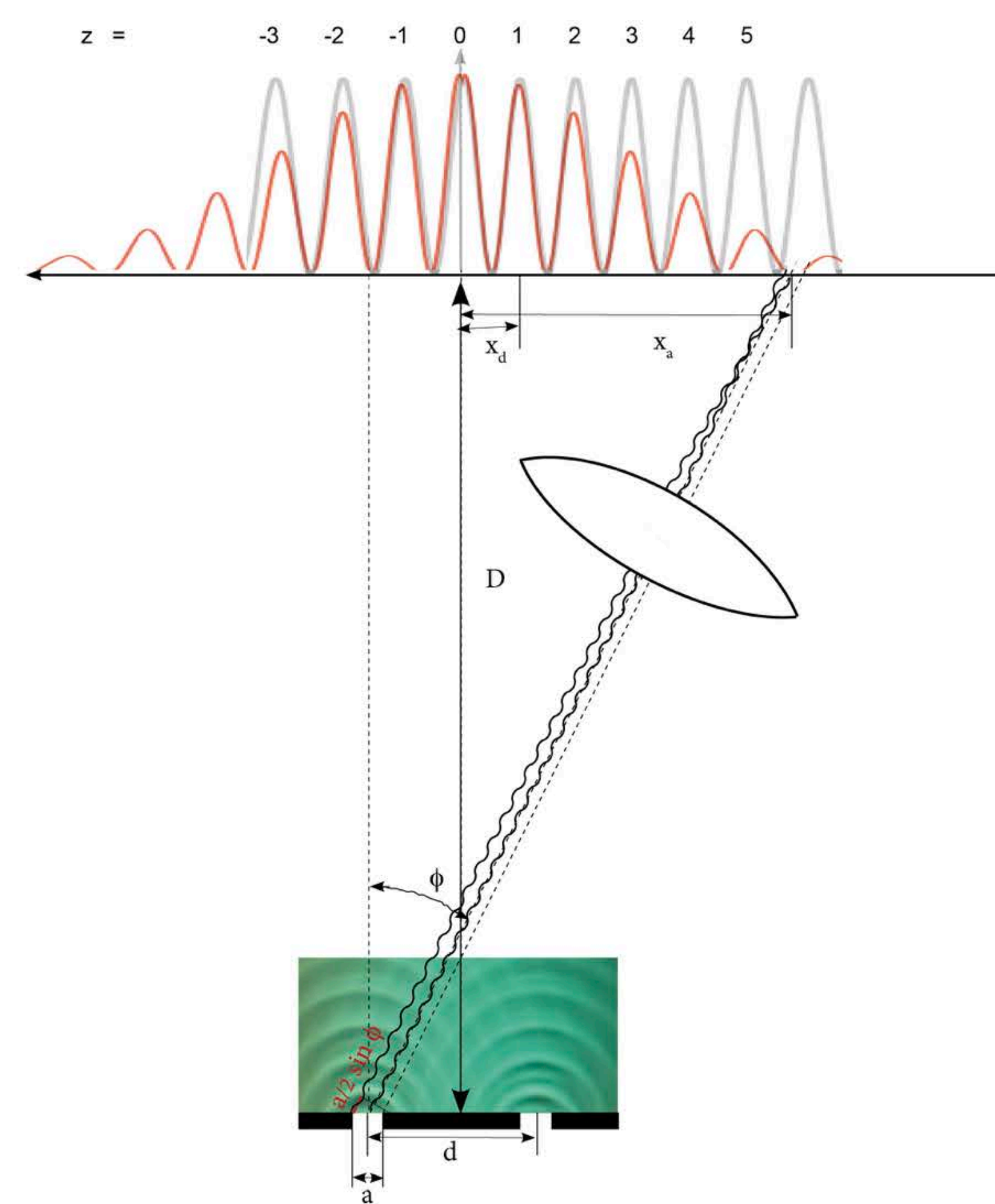
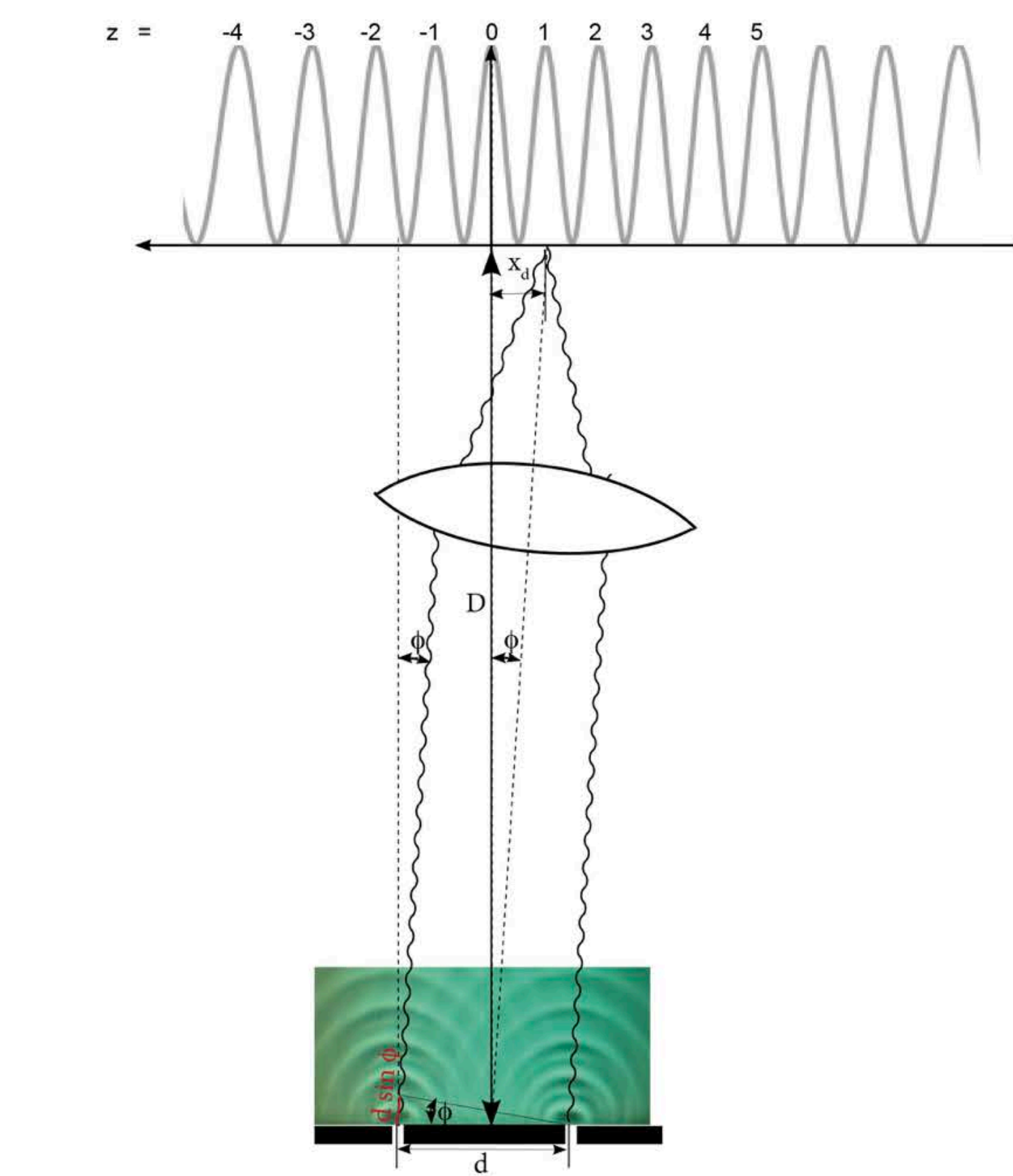
Der Spaltenabstand  $d$  bestimmt die Lage der Interferenzmaxima.

Wird  $d$  verkleinert, so werden die Interferenzmaxima auseinander gezogen.

Für (grosse) Abstände  $D$  und kleine Winkel  $\phi$

gilt näherungsweise:  $\sin \phi \approx \tan \phi = x/D$

also:  $x_d \approx z D/d \lambda$



### b) Beugung an der Spalte

Verfolgen wir zwei Wellen vom Spaltenrand und der Spaltenmitte, so löschen sie sich aus, wenn gilt:

$$a/2 \sin \phi = z \lambda/2$$

Alle Wellen, die unter dem Winkel  $\phi$  von der Spalte der Breite  $a$  weggehen löschen sich aus falls gilt:

$$a \sin \phi = z \lambda \quad (\text{vereinfacht: } x_a \approx z D/a \lambda)$$

Die Spaltbreite führt zu einer Intensitätsmodulation.



### c) Interferenz am Strichgitter

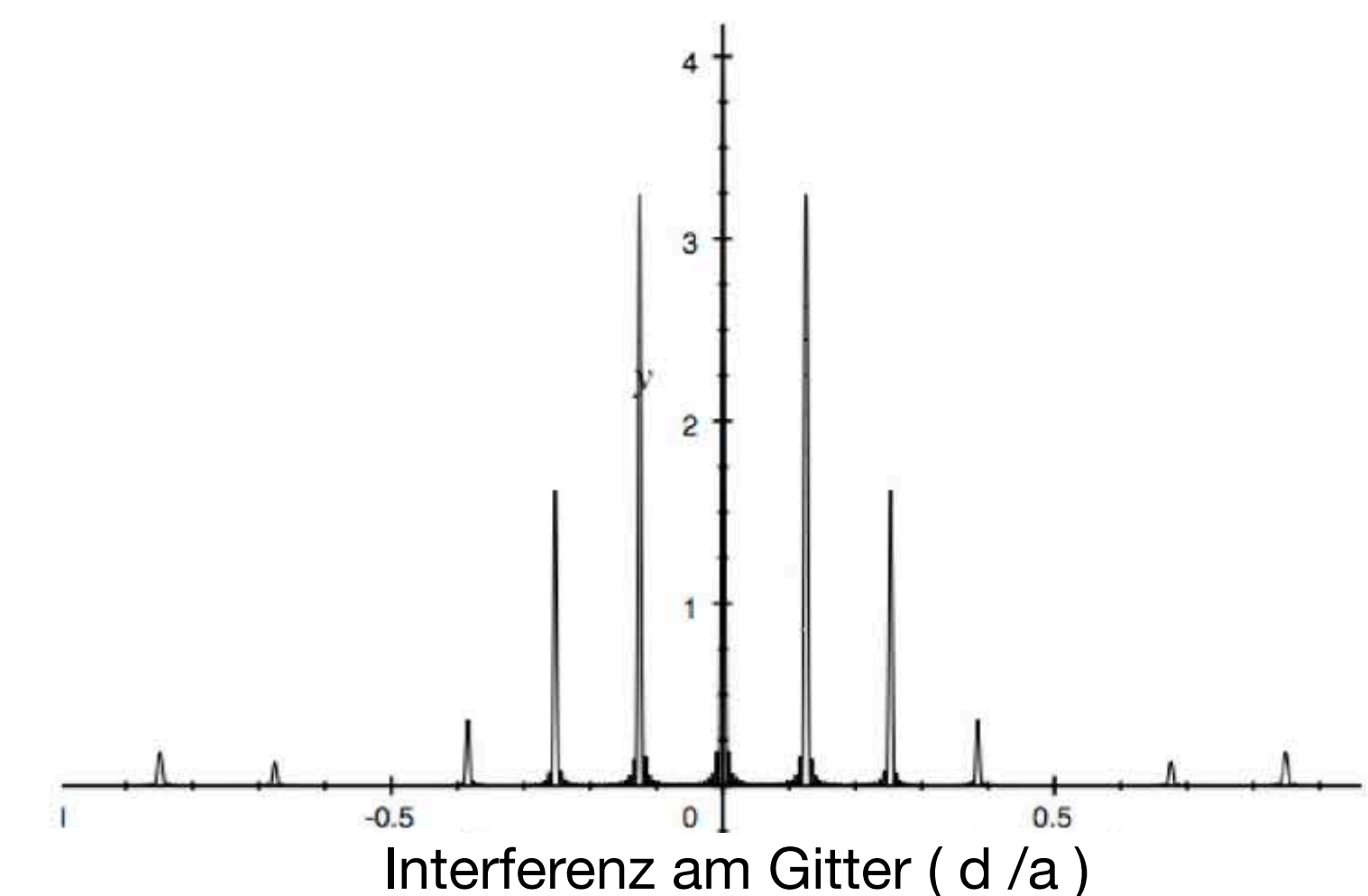
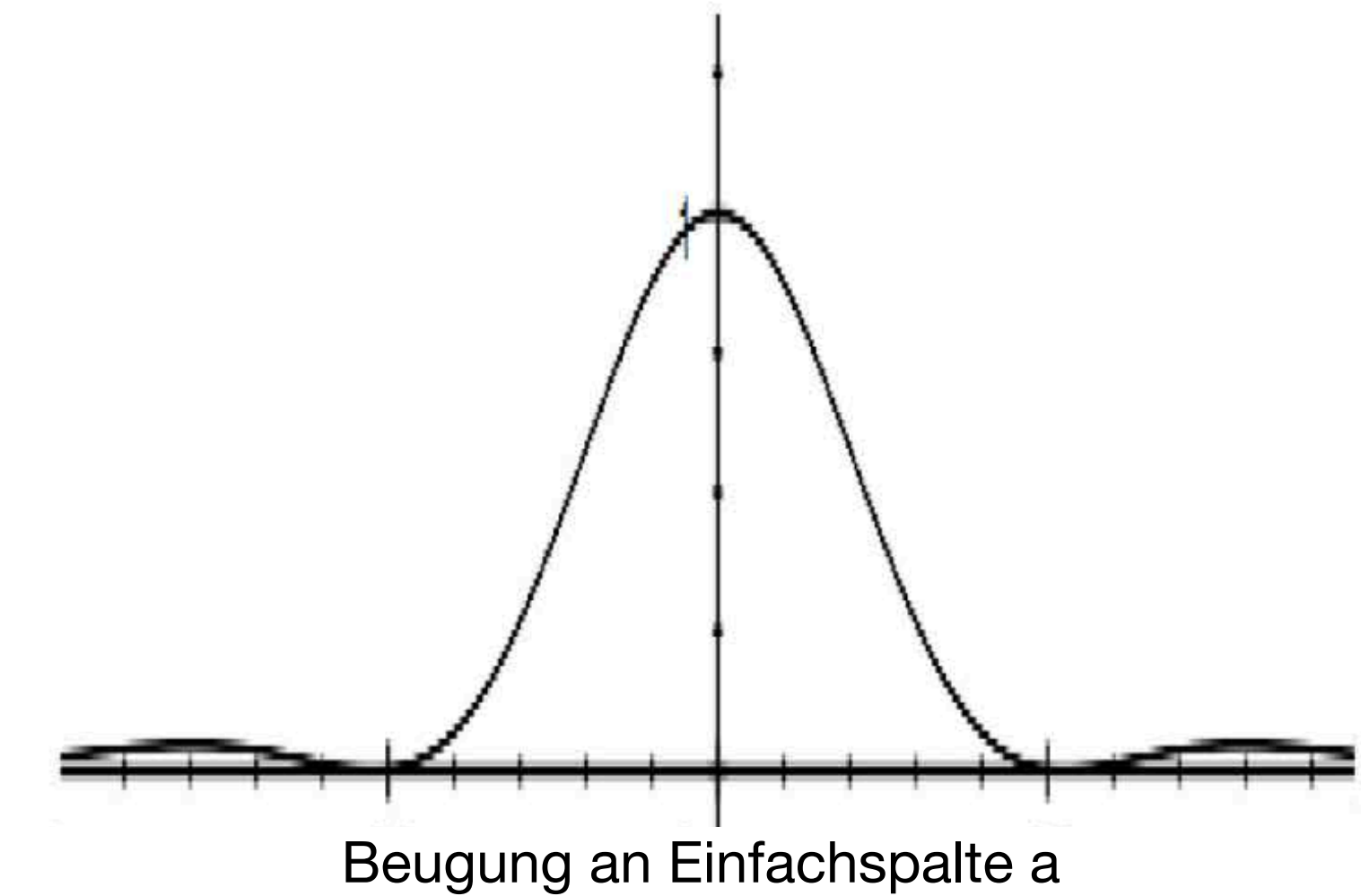
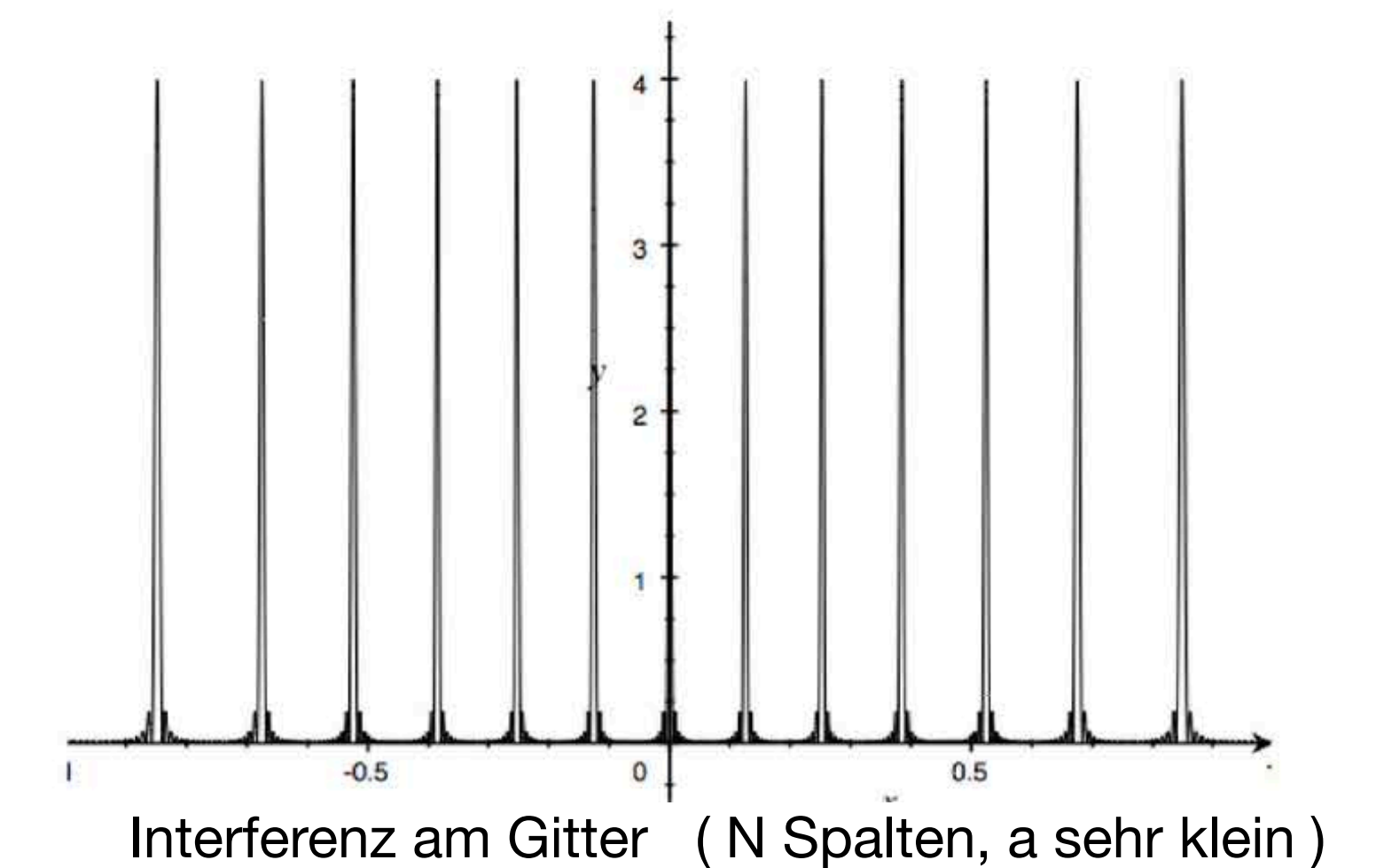
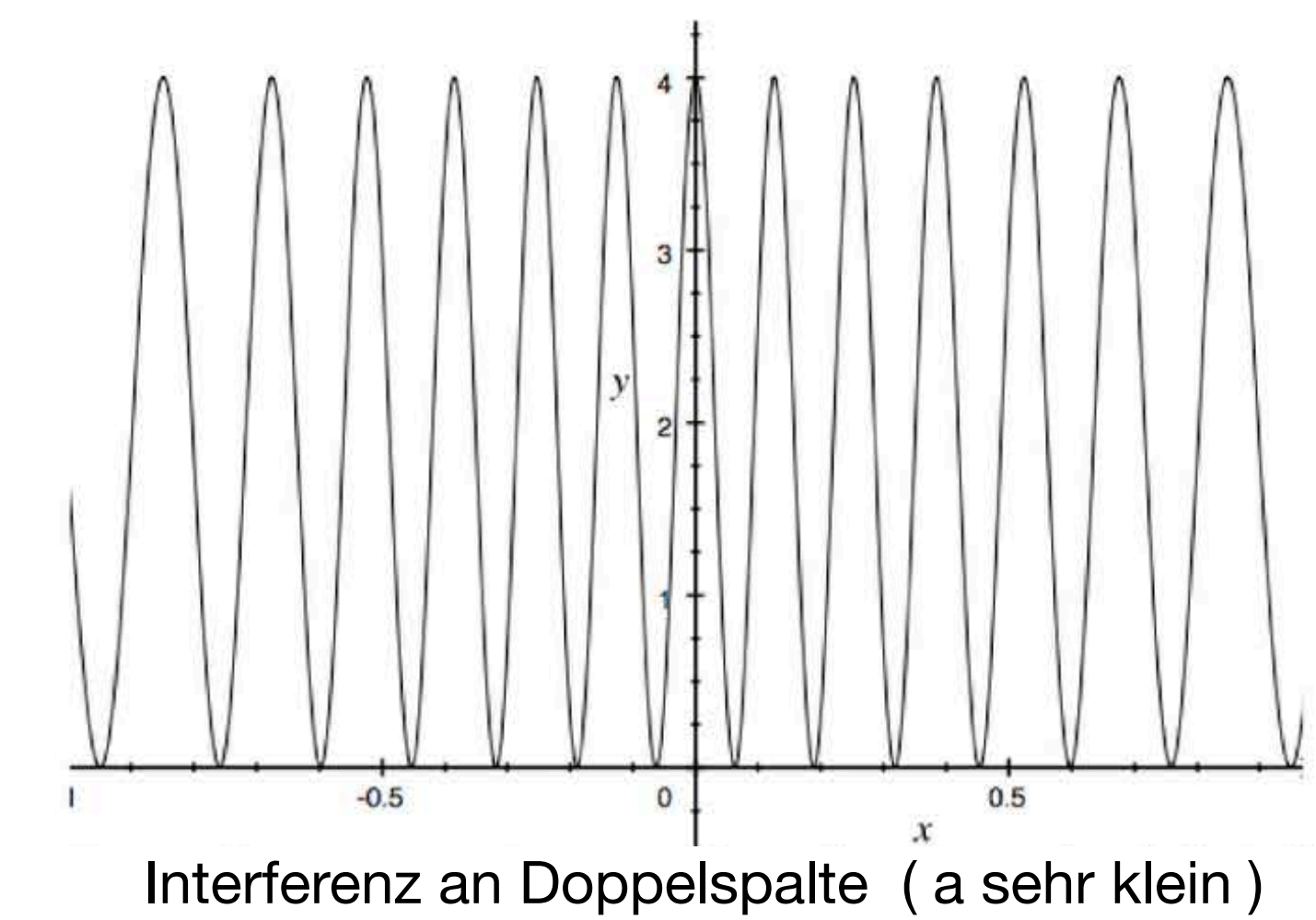
Verwenden wir mehrere äquidistante Spalten der Breite  $a$  und vom Spaltenabstand  $d$  (Gitterkonstante), so erscheinen die Interferenzmaxima am selben Ort, sie sind jedoch viel schärfer. Die Spaltbreite bestimmt immer noch die Intensitätsmodulation

### d) Interferenz an der Lochblende

Die Analyse der Interferenz bei der Lochblende führt auf Bessel-Gleichungen. In erster Näherung können die Ringdurchmesser mit folgender Gleichung berechnet werden:

$$2a \sin \phi = 1,22 \lambda$$

Diese Beziehung spielt bei der Bestimmung des Auflösungsvermögens bei optischen Geräten eine grosse Rolle. So können z.B. die Bilder zweier Sterne nur dann getrennt abgebildet werden, wenn das Bild des einen Sterns in das Beugungsminimum des andern fällt.

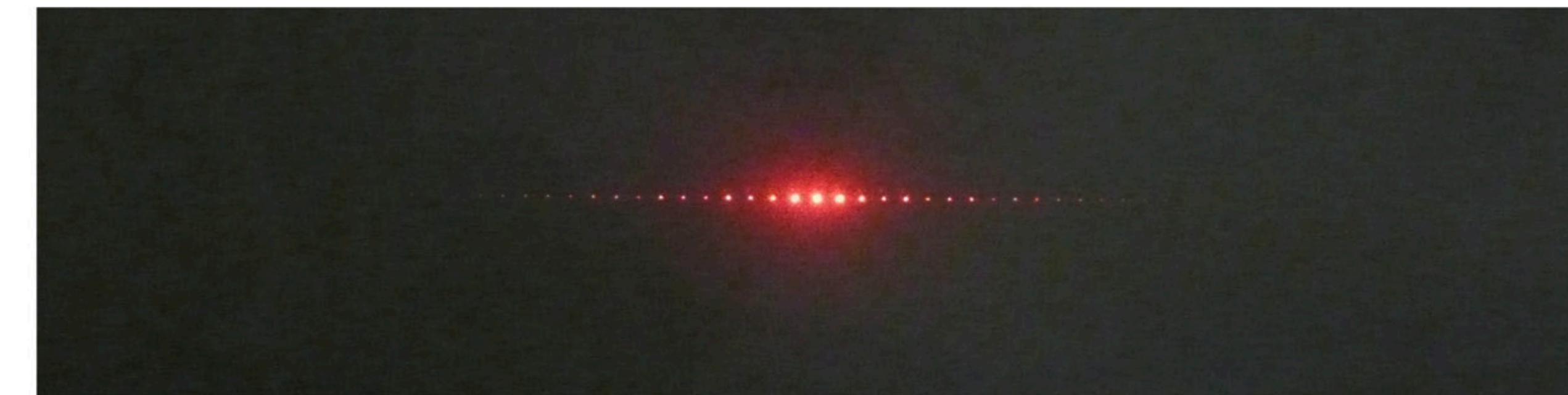


**e) Babinet Theorem  
Beispiele**

Die Überlagerungen des Lichtes, das durch eine Spalte der Breite  $a$  hindurchgeht mit dem Licht, das ein Stäbchen der derselben Dicke durchlässt muss sich auslöschen, denn ihre Kombination lässt kein Licht mehr durch. Folglich ist das Interferenzbild dieser beiden Blenden gleich, jedoch Phasenverschoben. --> Babinet -Theorem.



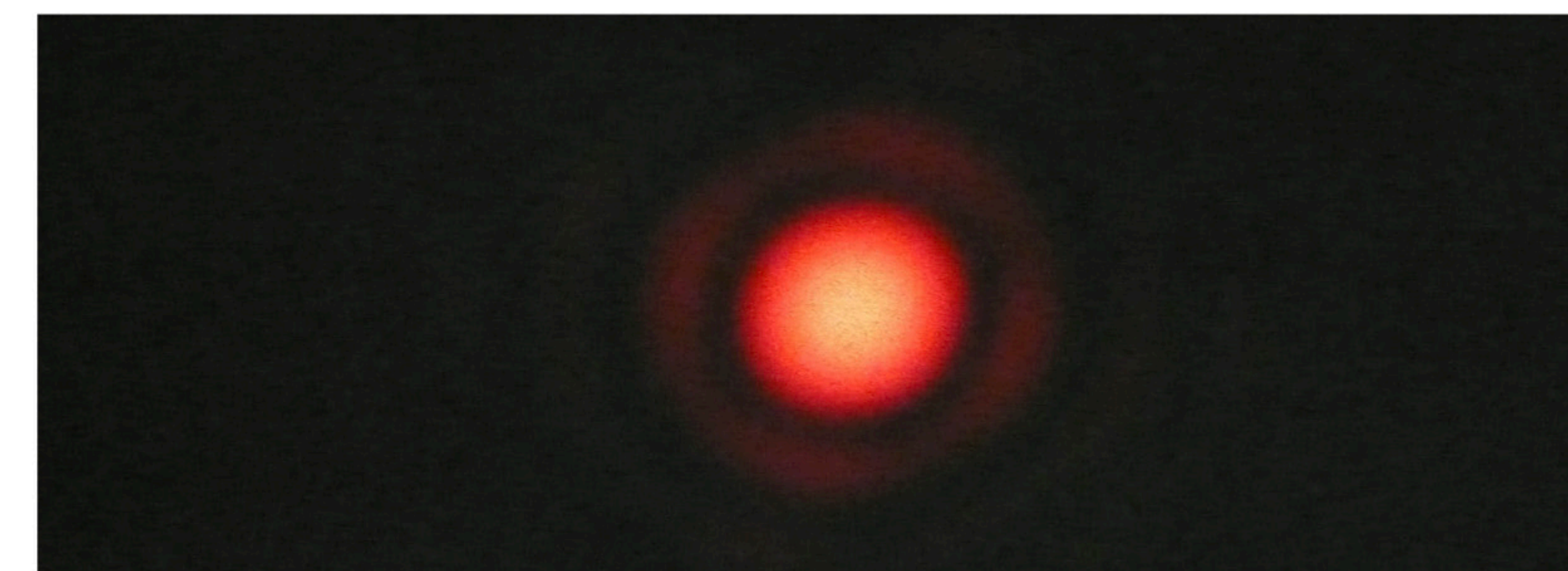
Spalte  $a = 0.24 \text{ mm}$  / Draht  $a = 0.24 \text{ mm}$



Gitter  $d = 1/8 \text{ mm}$



Gitter  $d = 1/100 \text{ mm}$

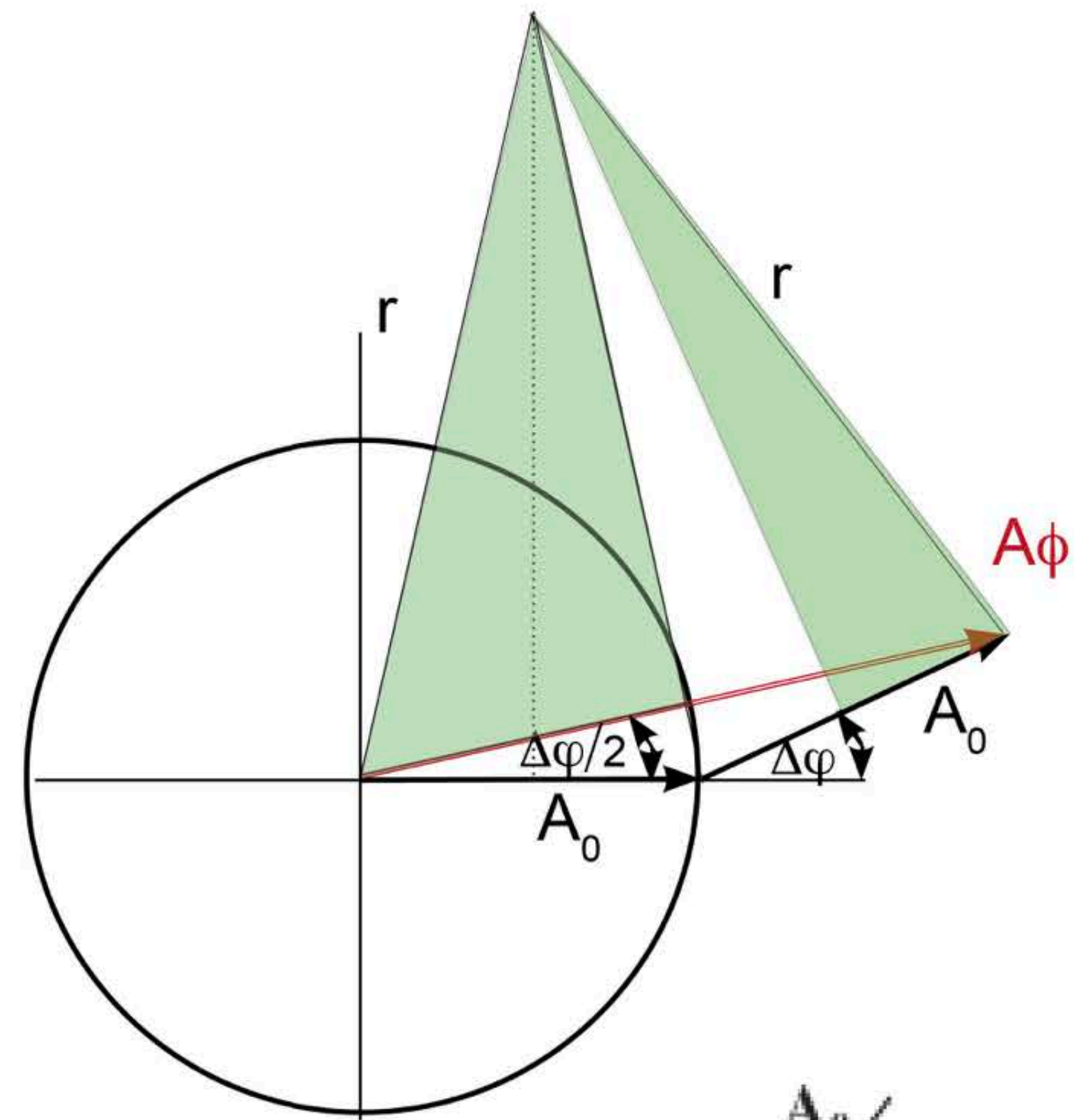


Lochblende  $a = 0.1 \text{ mm}$



Bärlappsporen

## f) Überlagerung zweier Wellen, die durch eine Doppelspalte gehen



Legende:

- $A_0$ : Amplituden der beiden zu überlagernden Wellen
- $A_\phi$ : Amplitude der überlagerten Wellen
- $\Delta s$ : Gangunterschied der zwei Wellen  
 $\Delta s = d \sin \phi$
- $\Delta \varphi$ : Phasendifferenz zweier Wellen aus den beiden Spalten  
 $\Delta \varphi = (\Delta s / \lambda) 2\pi$

$$\sin \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{A_0/2}{r}$$

$$\sin 2 \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{A_\phi/2}{r}$$

$$A_\phi = \frac{A_0}{2} \frac{\sin(2 \frac{\Delta \varphi}{2})}{\sin(\frac{\Delta \varphi}{2})}$$

$$= \frac{A_0}{2} \frac{\sin(2 \frac{\Delta s}{\lambda} \pi)}{\sin(\frac{\Delta s}{\lambda} \pi)}$$

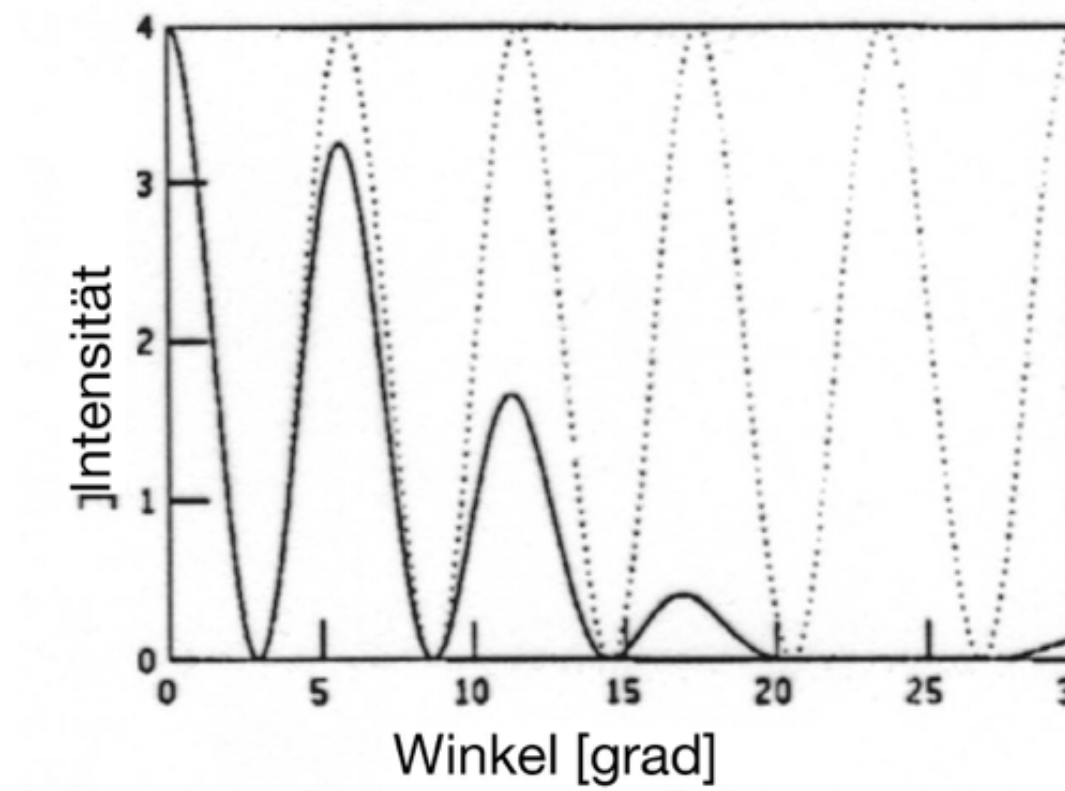
$$A_\phi = \frac{A_0}{2} \frac{\sin(2 \frac{d \sin \phi}{\lambda} \pi)}{\sin(\frac{d \sin \phi}{\lambda} \pi)}$$

$$I_\phi = \frac{A_0^2}{4} \frac{\sin^2(2 \frac{d \sin \phi}{\lambda} \pi)}{\sin^2(\frac{d \sin \phi}{\lambda} \pi)}$$

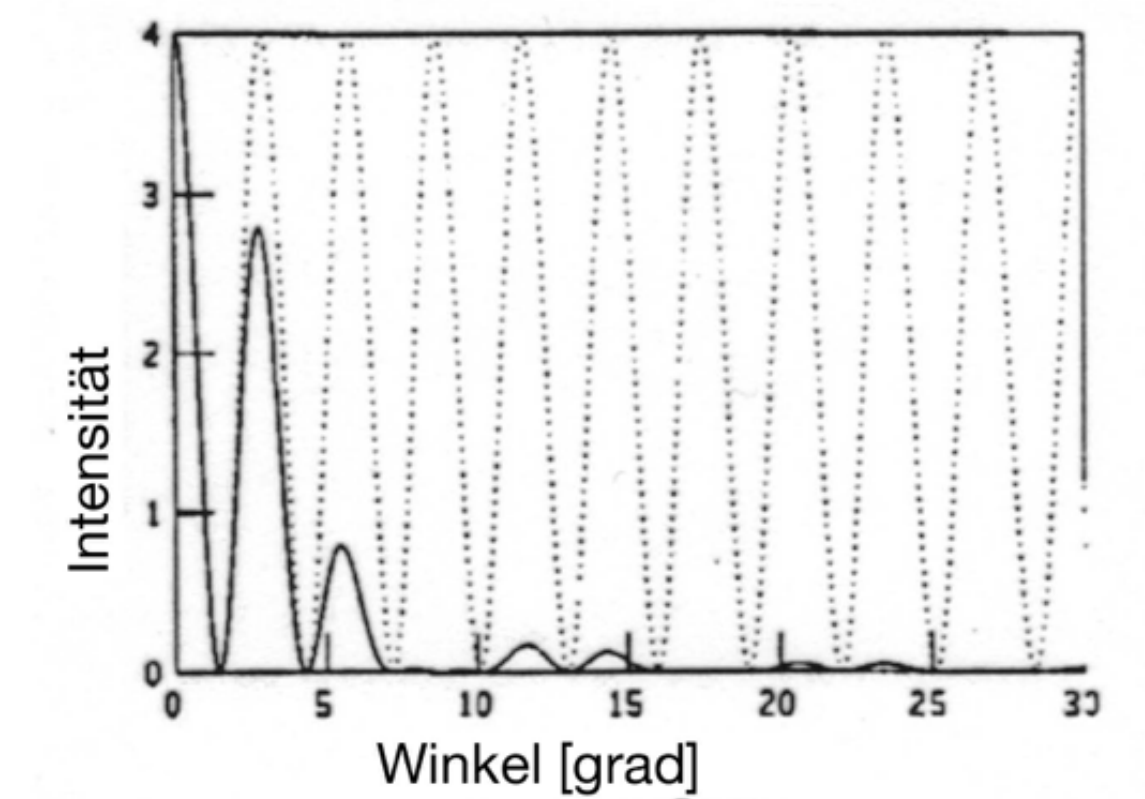
### Beispiele (Berechnungen)

..... Interferenz an Doppelspalte  
 — Beugung an Doppelspalte

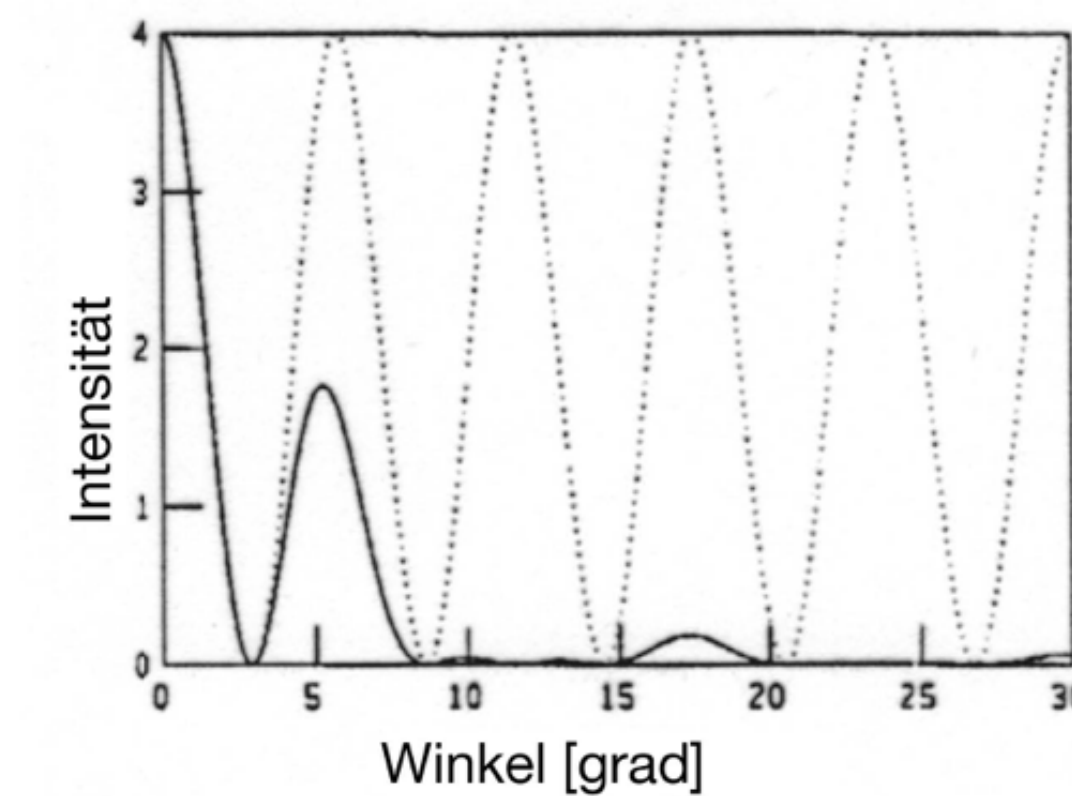
$\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $d = 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $a = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$



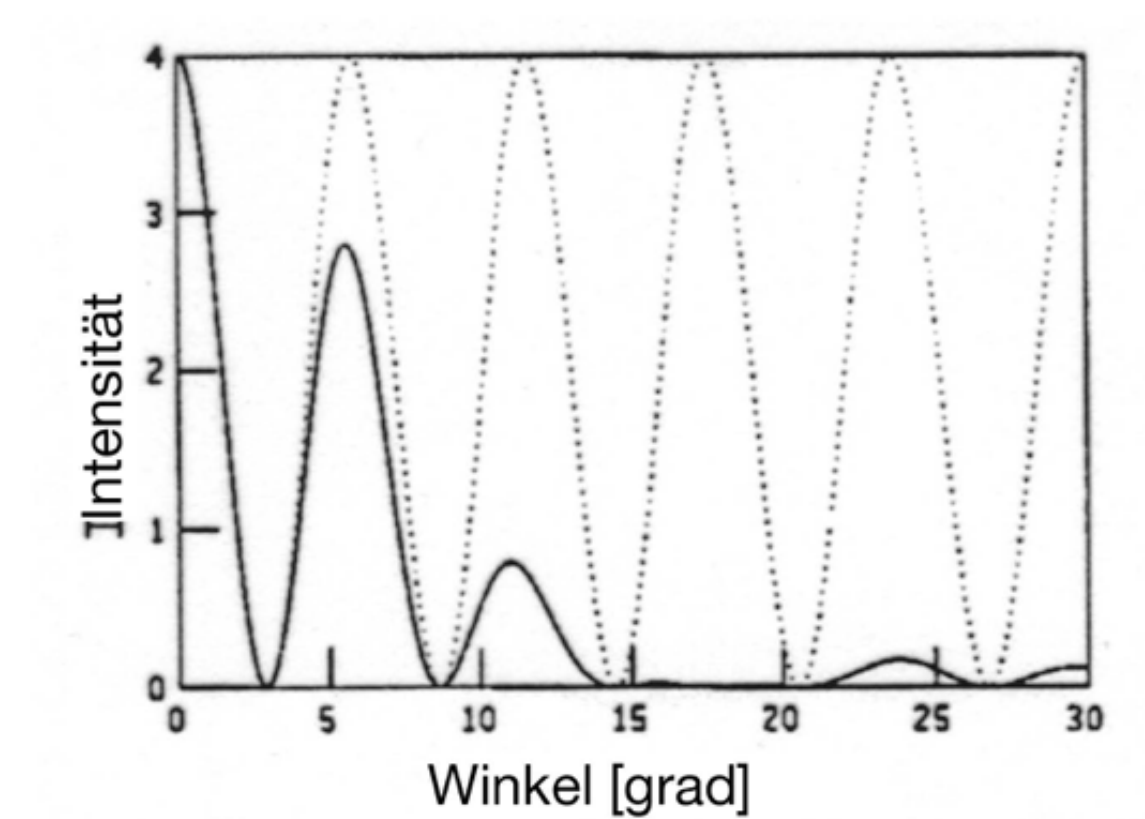
$\lambda = 10^{-6} \text{ m}$ ,  $d = 19.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $a = 6.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$



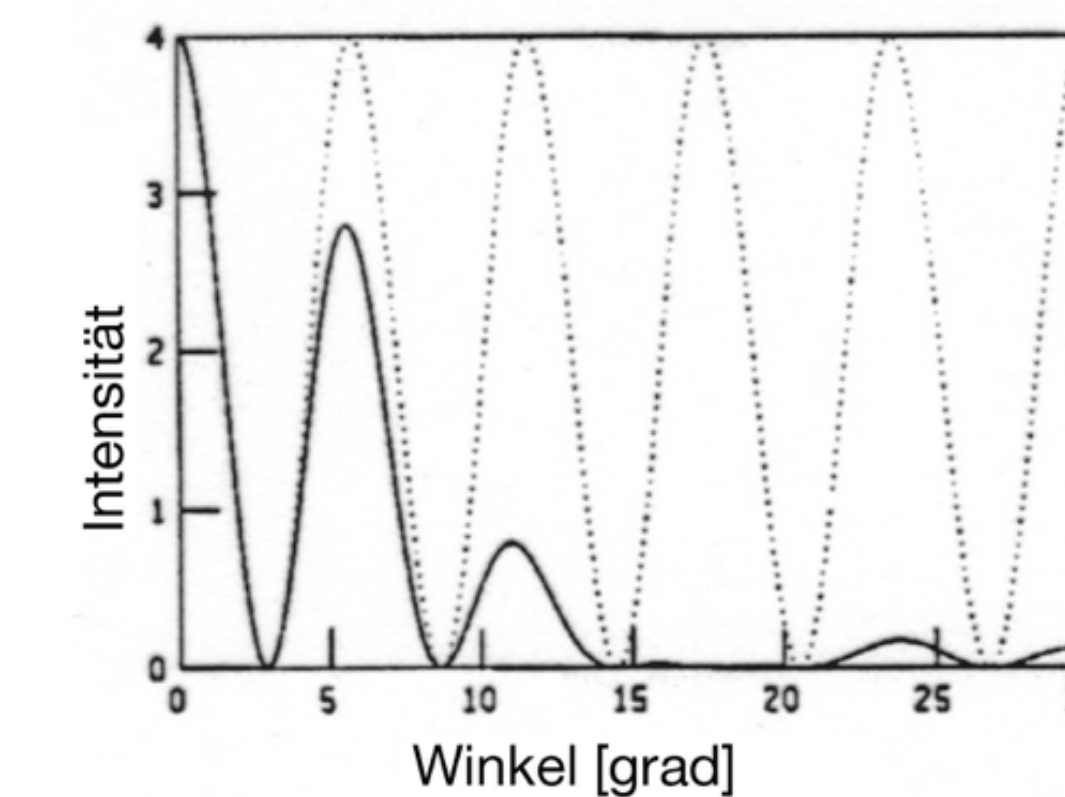
$\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $d = 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $a = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$



$\lambda = 10^{-6} \text{ m}$ ,  $d = 9.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $a = 3.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$



$\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $d = 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $a = 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$



## 6. Pendel“welle“

Bei der theoretischen Behandlung eines Fadenpendels geht man davon aus, dass die Aufhängung eine verschwindend kleine Masse hat im Vergleich zum (punktförmigen) Pendelkörper. Nimmt man weiter an, dass die Auslenkungen klein sind im Vergleich zu der Pendellänge, so bestimmt ein lineares Kraftgesetz diese Bewegung. Es entsteht eine **Harmonische-** resp. **Sinus-Schwingung.**

Die Schwingungsdauer ist dann nur von der Fallbeschleunigung und der Pendellänge abhängig. (Bei einer Vervielfachung der Pendellänge wird die Periodendauer verdoppelt) Dass die Periodendauer nicht mit zunehmender Masse auch zunimmt, ist ein Indiz dafür, dass mit der Zunahme der schweren Masse, die Trägheit, d.h. die träge Masse gleich stark zunimmt.

Ein Sekundenpendel hat eine Länge von  
 $l = g/4\pi^2 = 0.248 \text{ m}.$

Werden 10 weitere, längere Pendel in Reihe so aufgehängt, dass das 11. Pendel nach 20 Sekunden mit dem 1. Pendel in Phase schwingt, so hat das 11. Pendel die Länge  $l = g/\pi^2 = 0.99 \text{ m}.$

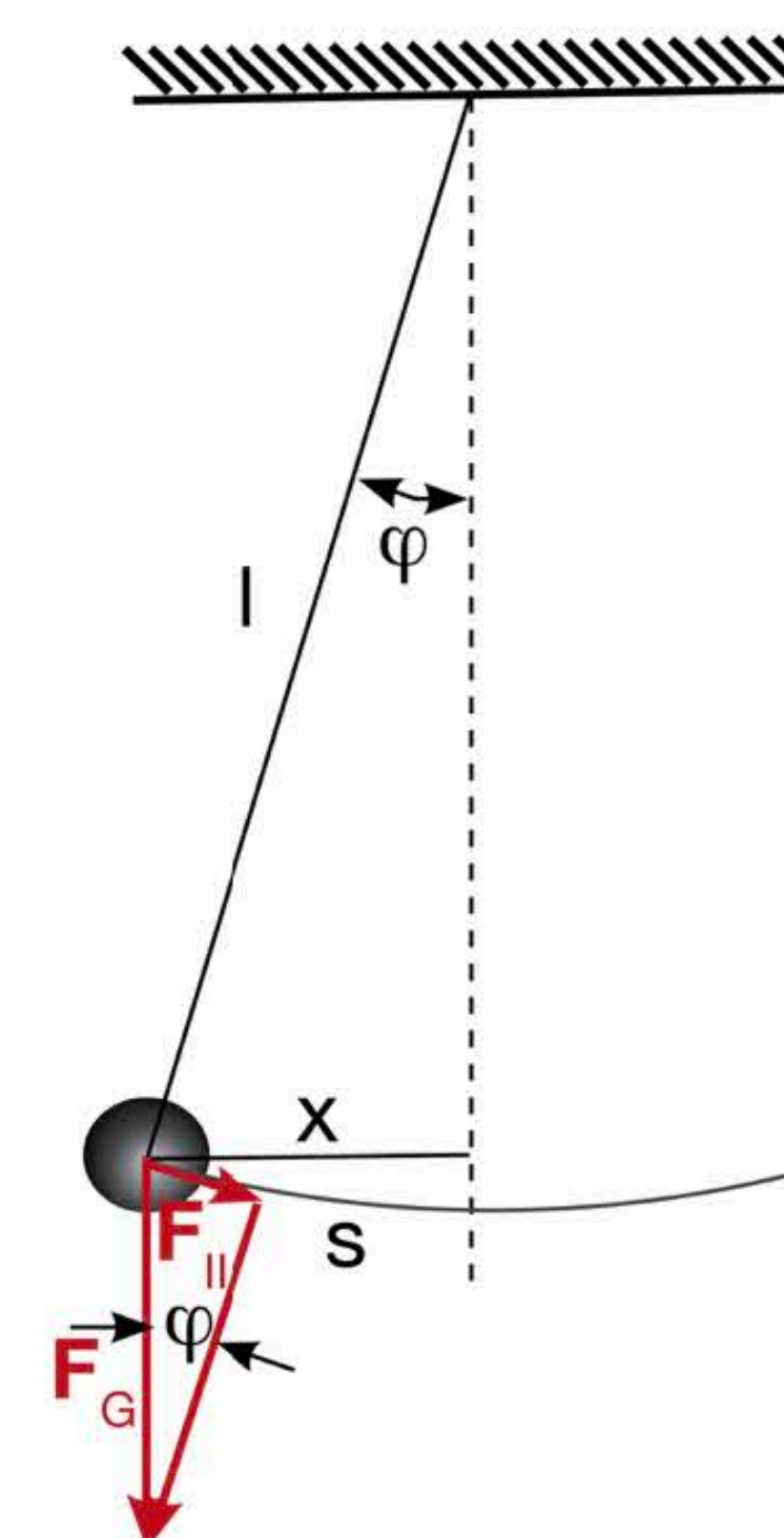
Wenn das kürzeste Pendel 20 Schwingungen in 20 Sekunden macht schwingen alle folgenden Pendel in dieser Zeitspanne je einmal weniger. Das 11. Pendel hat eine Periodendauer von 2 Sekunden. Ganz allgemein: Die Periodendauern des 11. Pendels ergibt sich zu:

$$T_n = 20/(21-n) \quad \text{und die Länge } l_n = g/4\pi^2 T_n^2$$

Die Simulation der Pendelbewegungen zeigt klar, dass es sich hier nicht um eine Welle handeln kann. Bei jeder echten Wellenbewegung haben benachbarte, miteinander gekoppelte Schwinger immer dieselbe Phasenverschiebung.



### Fadenpendel



Falls  $\varphi$  klein, dann  $s \approx x$

$$F_{||} = mg \sin \varphi = mg x/l$$

**Diff. Gleichung:**

$$\frac{mg}{l} x = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} - \frac{g}{l} x = 0$$

**Lösung:**

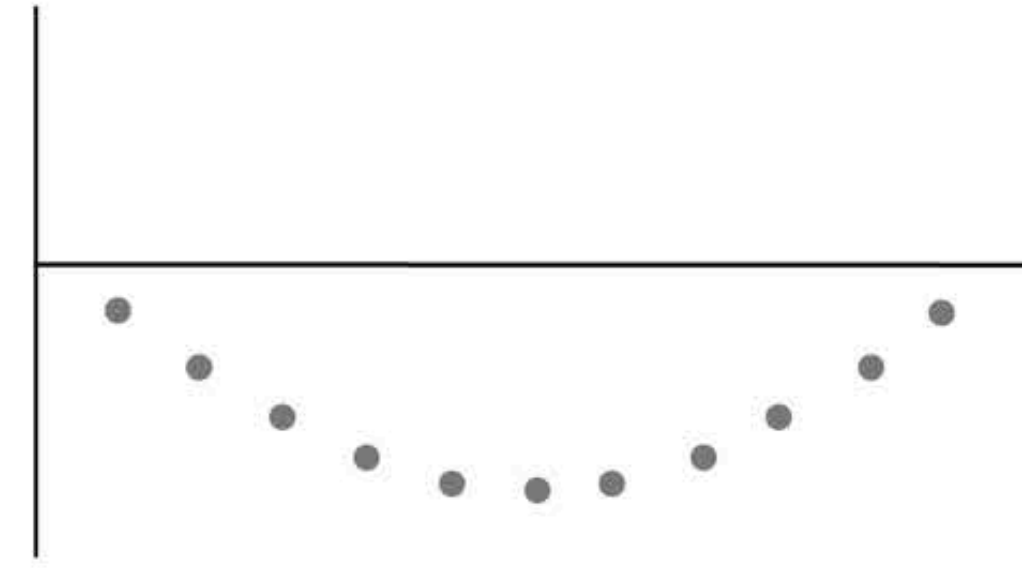
$$x(t) = \sin \omega t \quad \text{mit } \omega = 2\pi/T$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

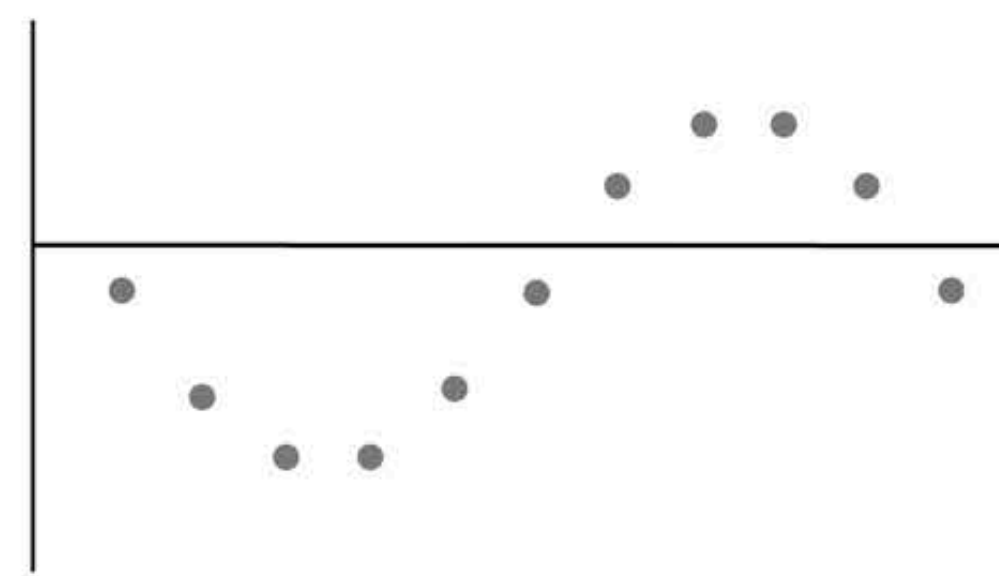
Die Pendelmasse spielt bei der Periodendauer eines Faden - (mathematischen) Pendels keine Rolle. Sie ändert mit der Quadratwurzel der Pendellänge.

# Simulation der schwingenden Pendelreihe

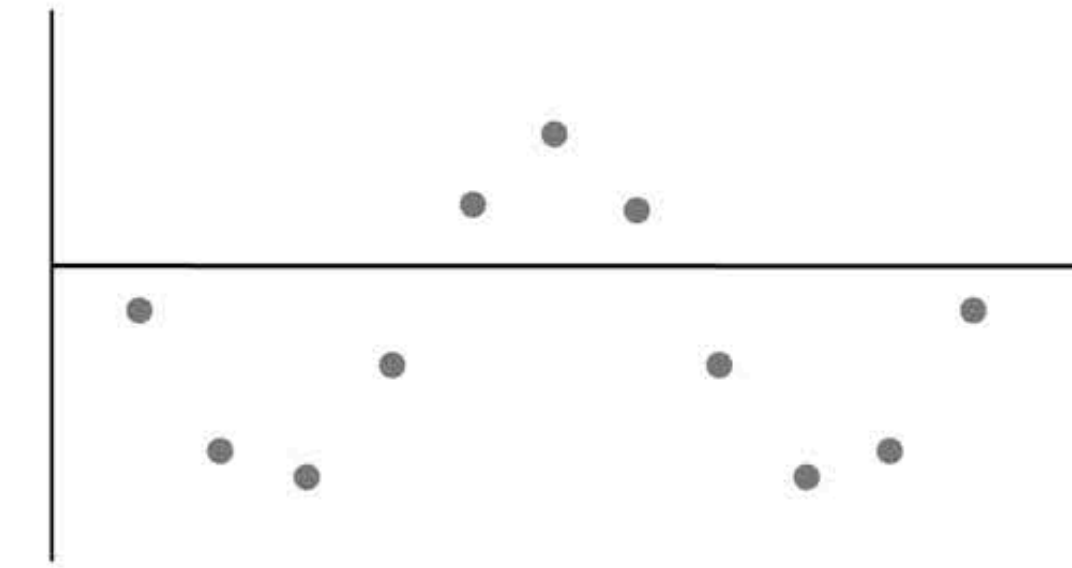
t = 1 s



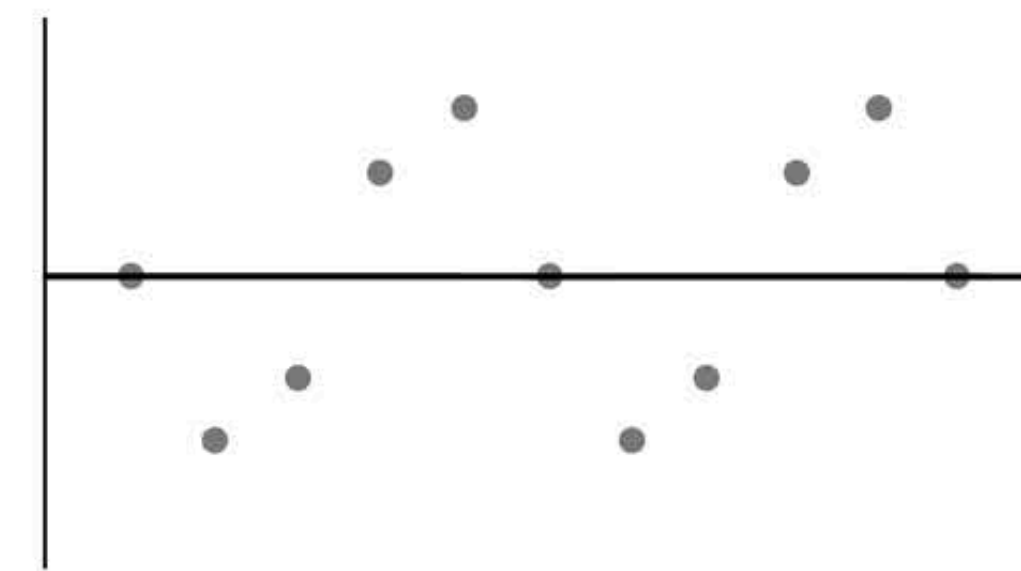
t = 2 s



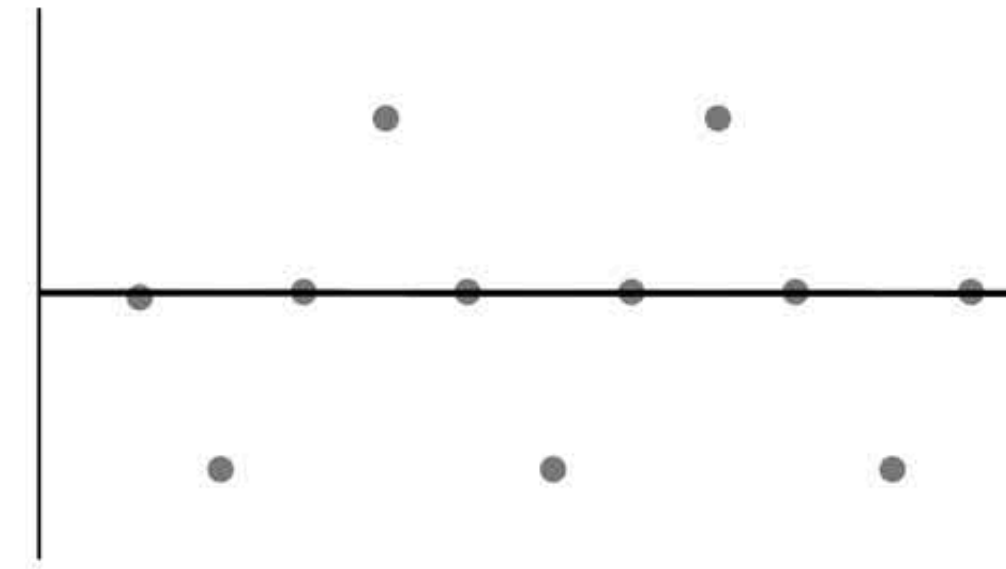
t = 3 s



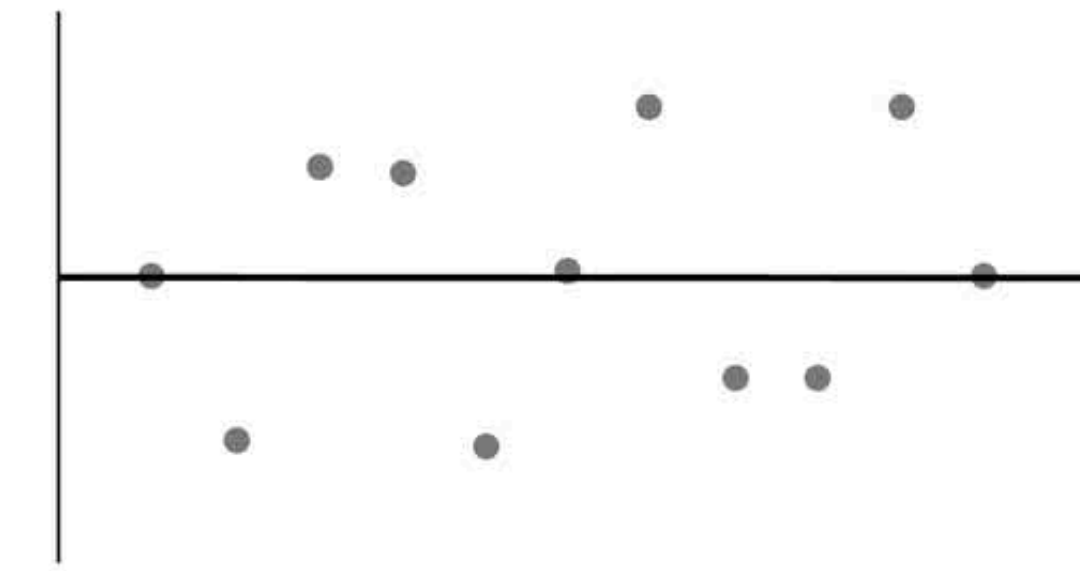
t = 4 s



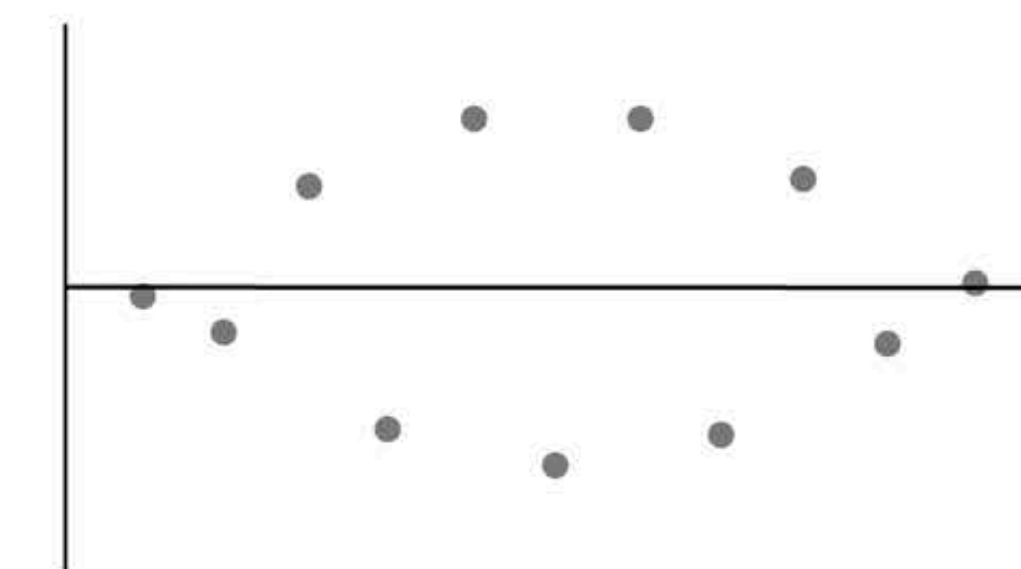
t = 5 s



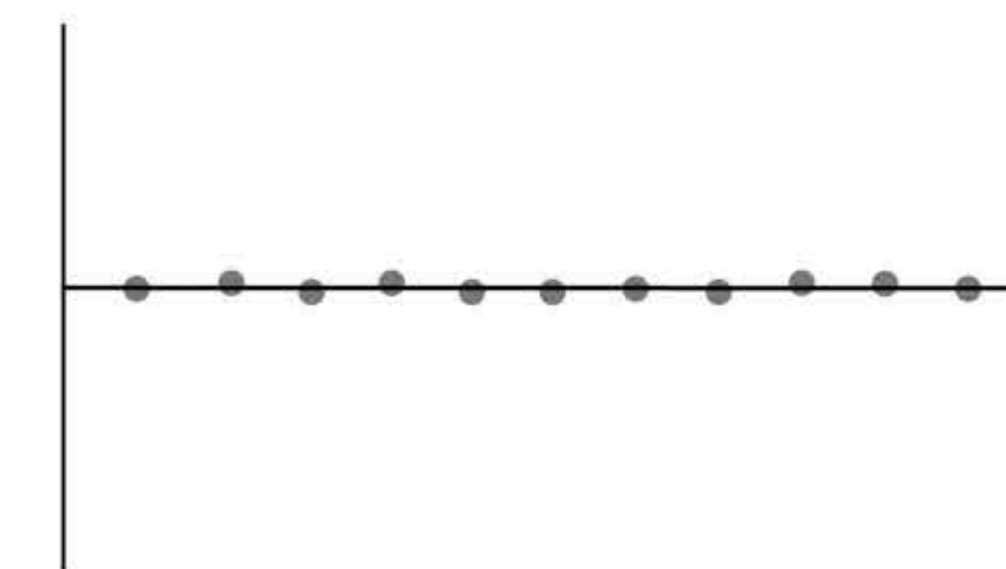
t = 6 s



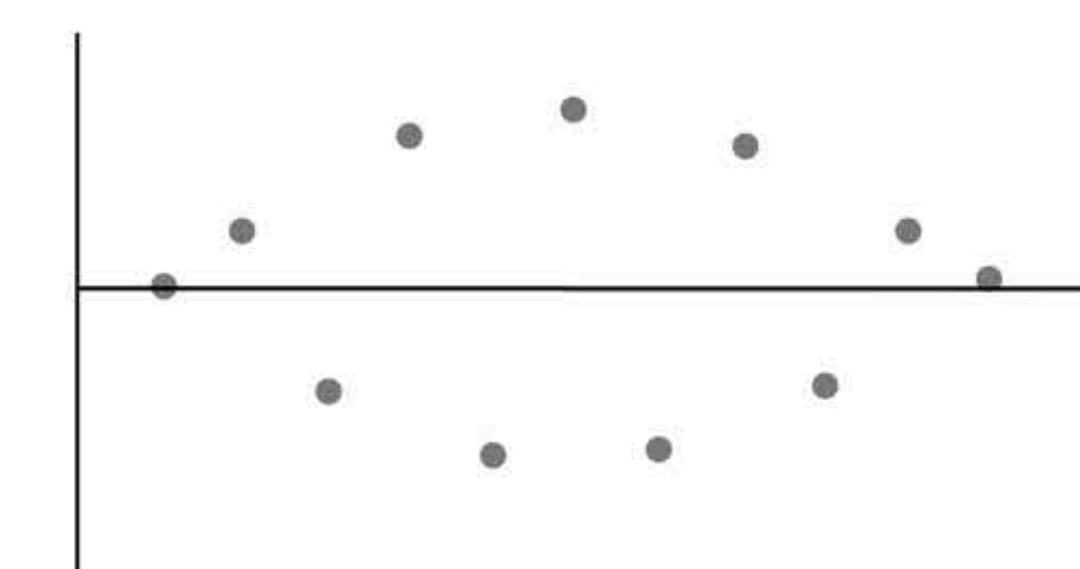
t = 14 s



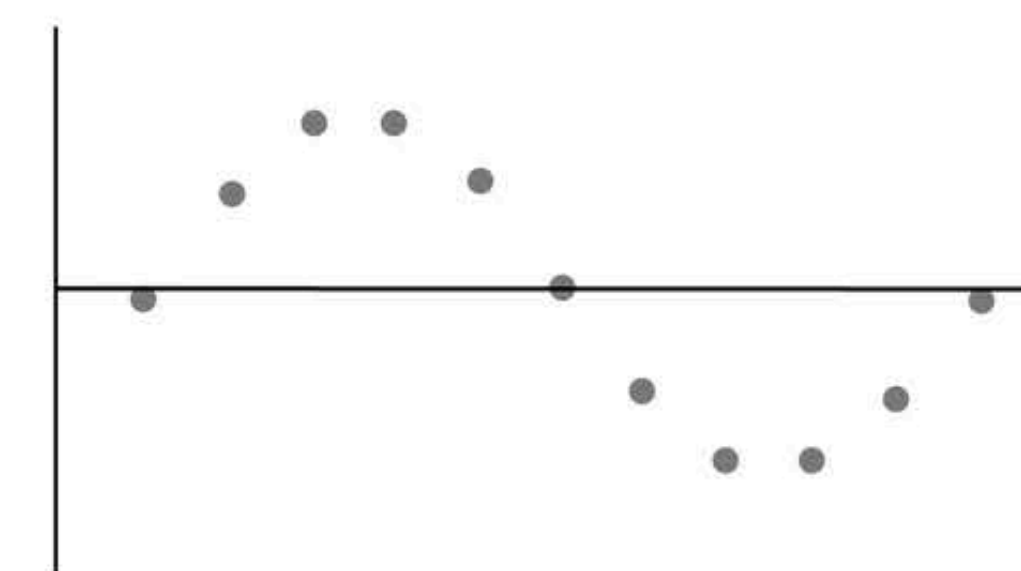
t = 15 s



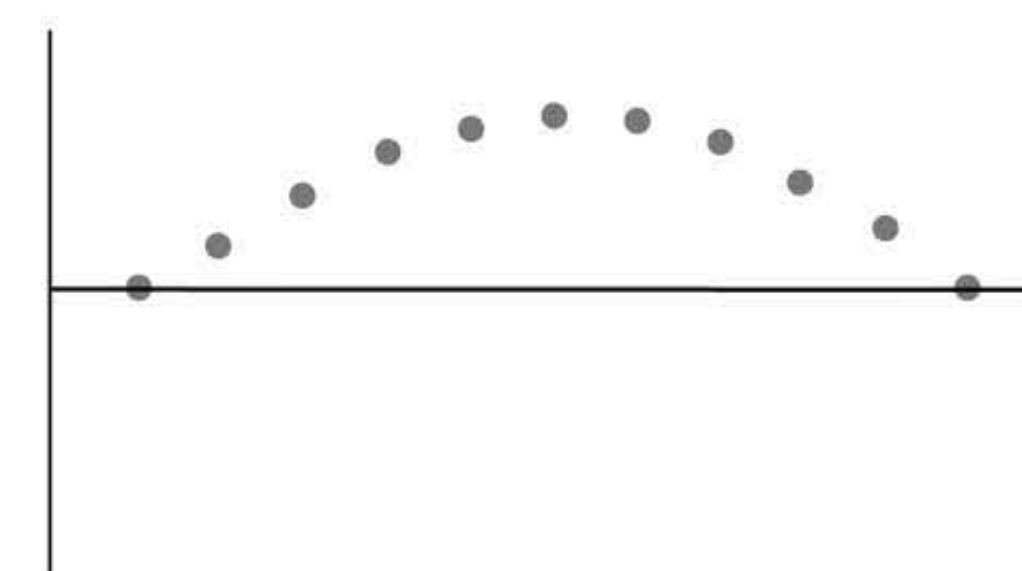
t = 16 s



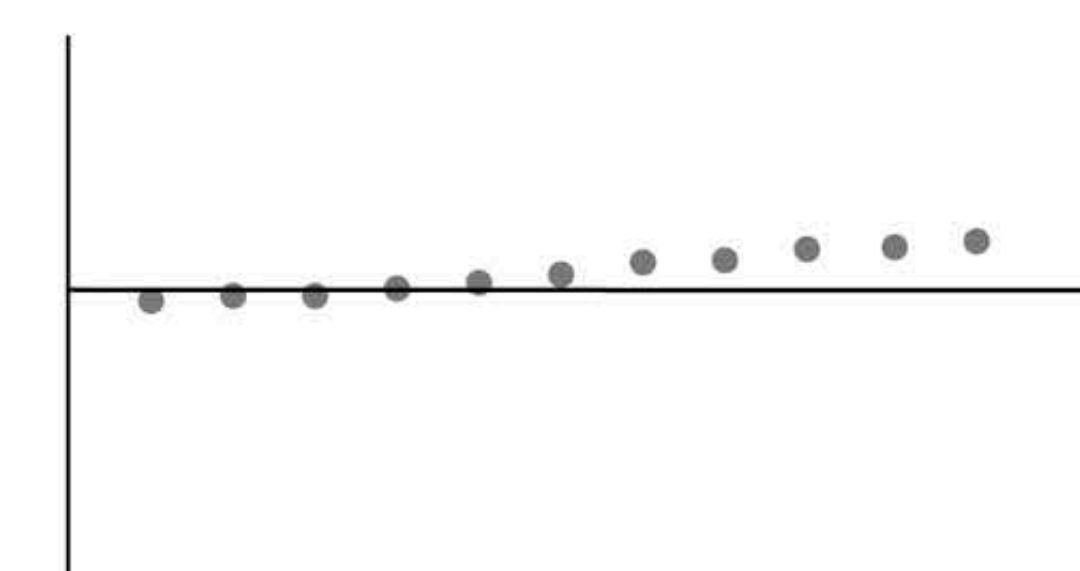
t = 18 s



t = 19 s



t = 20 s



## 7. Polychord

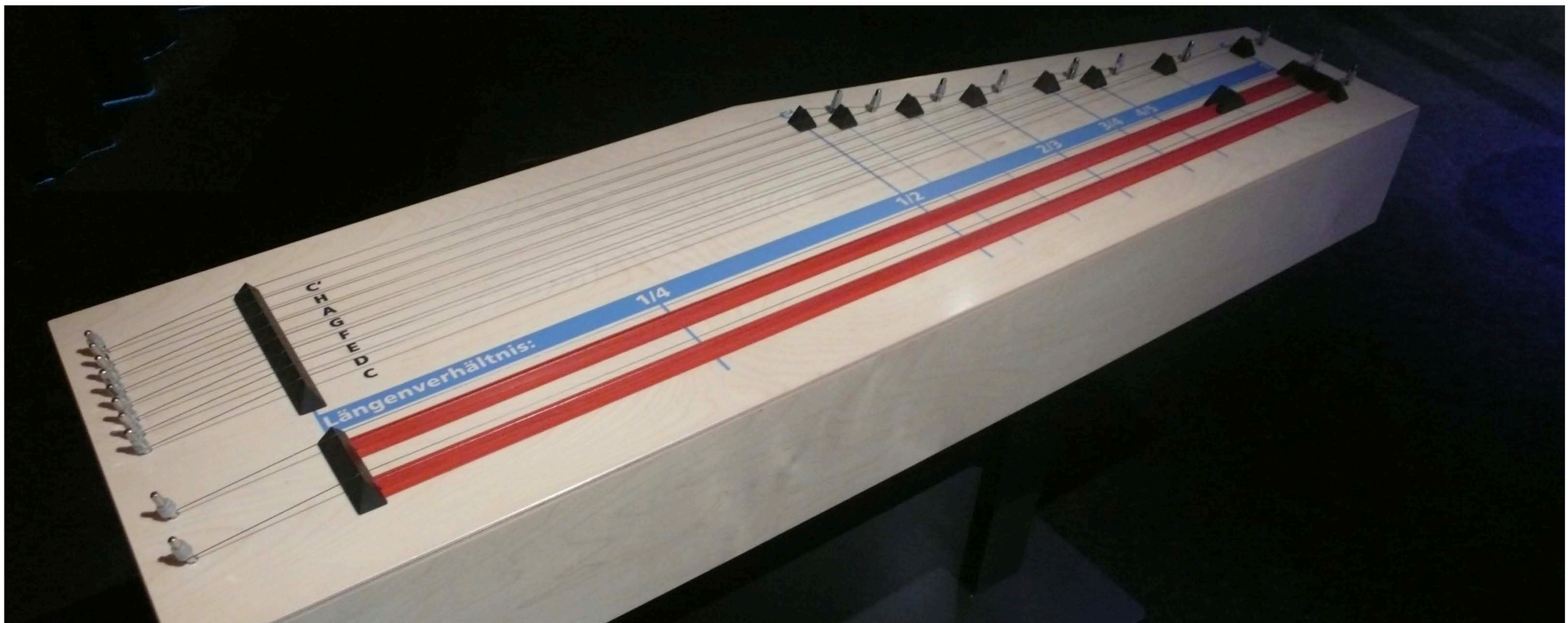
Im Klavier ist jedem Ton eine Saite entsprechender Länge zugeordnet. Der Violinist verändert während des Spiels die Saitenlängen und so die Tonhöhen. Um jedoch den Tonumfang eines Klaviers annähernd zu erreichen, müssen verschiedene Streichinstrumente – Bass, Cello, Bratsche, Geige – eingesetzt werden.

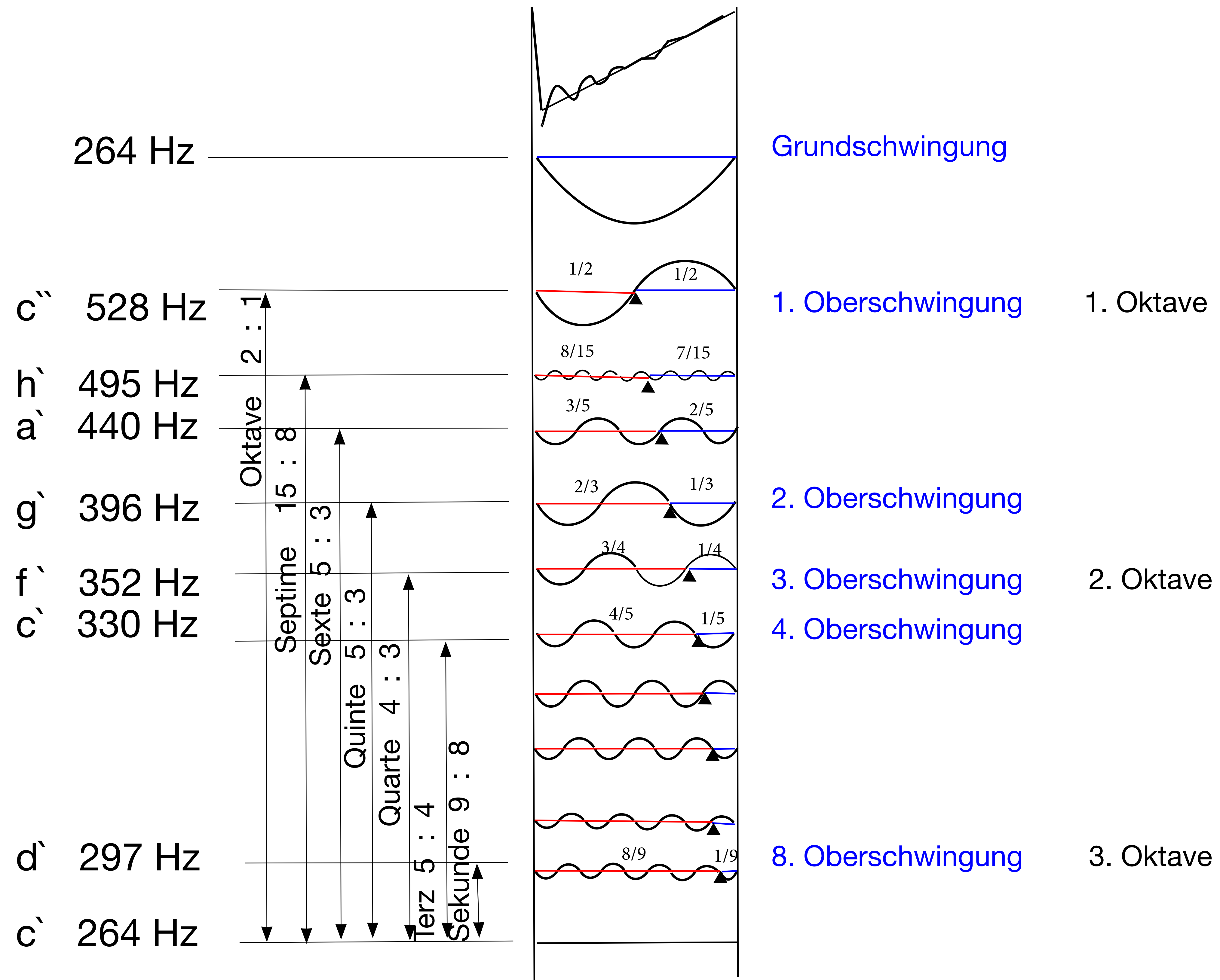
Beim sinusförmigen Anregen einer Saite wandern ein „Berg und ein Tal“ mit grosser Geschwindigkeit von einem festen Ende zum andern, werden dort reflektiert, kommen invertiert als Tal und Berg zurück.

Der Vorgang wiederholt sich immer wieder nach der gesamten Laufzeit  $T$  (hin und zurück). Wähle ich die Anregungszeit (Auf- und Abbewegung) gerade so gross, wie die Laufzeit, so entsteht eine stehende Welle, oder eine sog. Eigenschwingung.

Den Kehrwert der Laufzeit ( $T$ ) nennt man Frequenz. ( $f = 1/T$ ). Sie gibt an, wie oft die Saite in einer Sekunde eine volle Schwingung vollführt.

Wird die Saite nicht sinusförmig angeregt, so sind der Grundschwingung weitere Oberschwingungen überlagert. Nebenstehende Figur zeigt ein Beispiel sägezahnartiger Anregung. (Zupfen)





**Chromatische C-Dur Tonleiter  
(mit reinen Intervallen)**

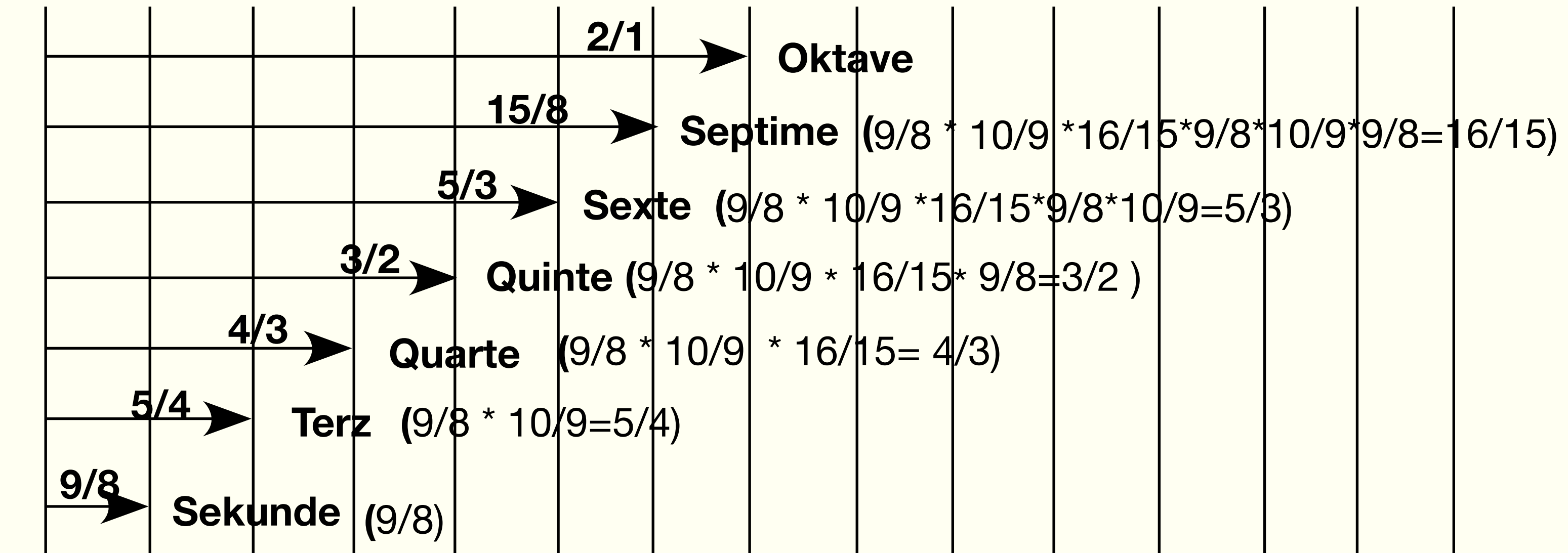


c d e f g a h c' d' e' f' g' a' h' c''

Chromatische C-Dur Tonleiter

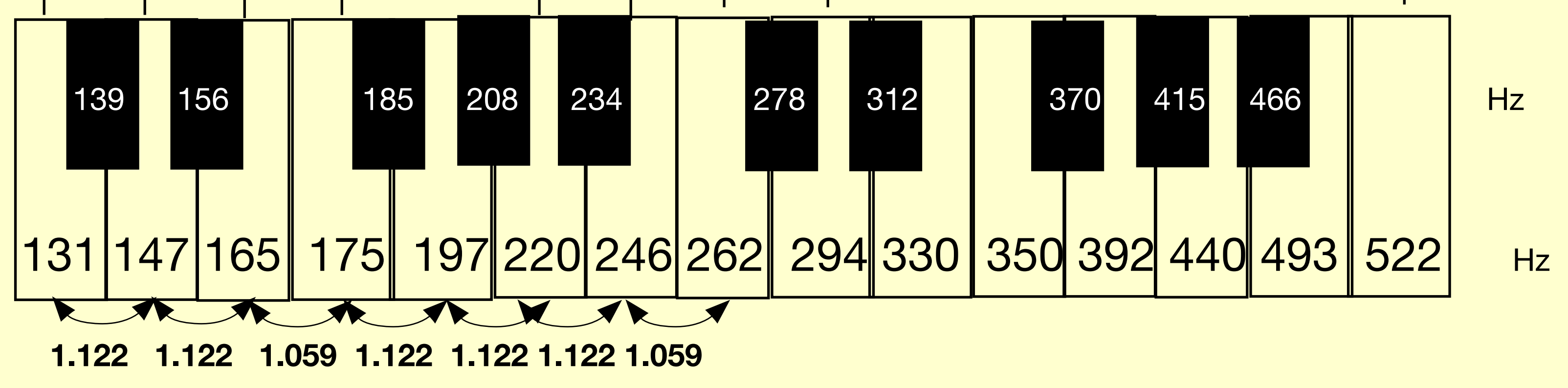
GG	KG	HT	GG	KG	GG	HT													
9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15													
1.125	1.11	1.066	1.125	1.11	1.12	1.066													
132	148	165	176	198	220	247	264	297	330	352	396	440	495	528	Hz				

GG: grosser Ganztonschritt  
 KG: kleiner Ganztonschritt  
 HT: Halbtonschritt



Temperierte Tonleiter

Halbtonschritte  $x = \sqrt[12]{2} = 1.059$





Die Frequenzen der Obertöne sind ganzzahlige Vielfache des Grundtones. Ihre Verhältnisse sind umgekehrt proportional zu den Saitenlängen. Eine Halbierung der Saitenlänge führt zu einer Verdoppelung der Frequenz, also zu einem Oktavensprung.

Die Schwingweite gibt die Lautstärke an. Diese Töne sind als Klänge wohlklingend. Aus diesem Grund wurde die natürliche Tonleiter auf der Basis der Obertöne gebildet. Daraus resultieren die reinen Tonintervalle. (Sekunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime, Oktave)

In der Musik wurde die Frequenzskala auf den Kammerton  $a = 440$  Hz normiert. Die

Frequenzintervalle legen dann alle weiteren Töne der Tonleiter fest. Wird nun die Saite in einem bestimmten Verhältnis verkürzt, so nimmt die Frequenz im umgekehrten Verhältnis zu. (Kap.4)

Versetze ich eine Saite in Schwingungen, so entsteht immer zum Grundton, je nach Instrument, eine Beimischung von Obertönen. Der Grundton ist am lautesten und die Obertöne so leise, dass wir sie kaum einzeln wahrnehmen können. Ihre Beimischung zum Grundton liefert die Klangfarbe.

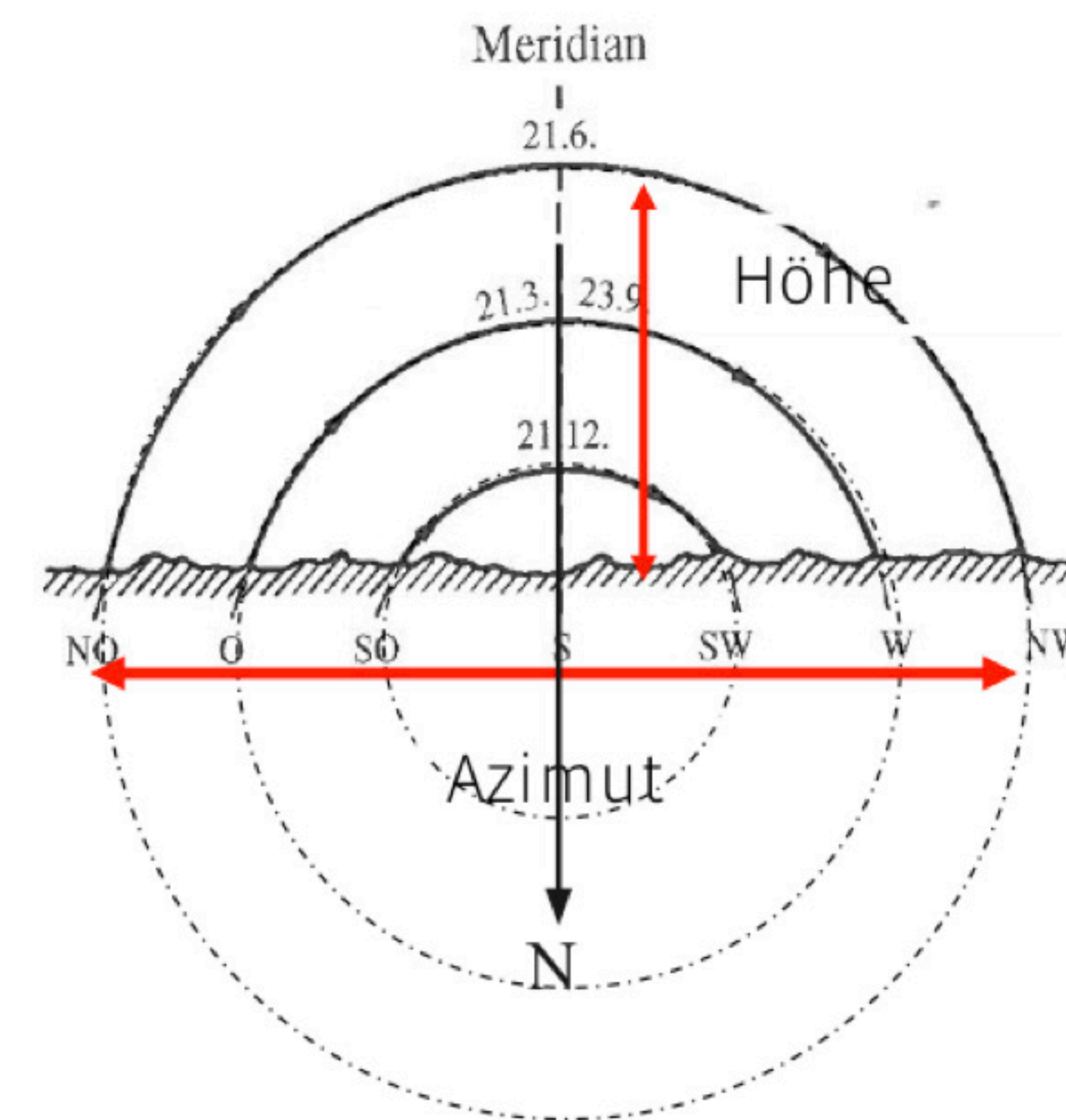
Die Frequenzen der Obertöne sind ganzzahlige Vielfache der Frequenz des Grundtones. Man spricht von harmonischen Obertönen.

Wählen wir einen einfachen Bruchteil (zwischen  $1/2$  und  $1$ ) der ursprünglichen Saitenlänge, so entstehen weitere Töne innerhalb einer Oktave. Die ausgewählten Töne stehen in einem engen Zusammenhang zu den Obertönen und liefern die reine Diatonische Dur-Tonleiter.

Verkürzung	Frequenzerhöhung	Tonintervall	
1/1	1	Grundton	
1/2	2	1. Oberton	1.Okt
1/3	3	2. Oberton	
1/4	4	3. Oberton	2.Okt
1/5	5	4. Oberton	
1/6	6	5. Oberton	
1/7	7	6. Oberton	
1/8	8	7. Oberton	3.Okt

## 8. Sonnenuhren

Unsere Sonne scheint sich scheinbar auf einer Kreisbahn um den Himmelsnordpol zu drehen, so wie alle anderen Fixsterne auch. Am Morgen geht sie im Osten auf, erreicht am Mittag ihre grösste Höhe über dem Horizont und geht dann am Abend im Westen unter. Diese periodische Bewegung wurde schon immer zur Zeiteinteilung herangezogen

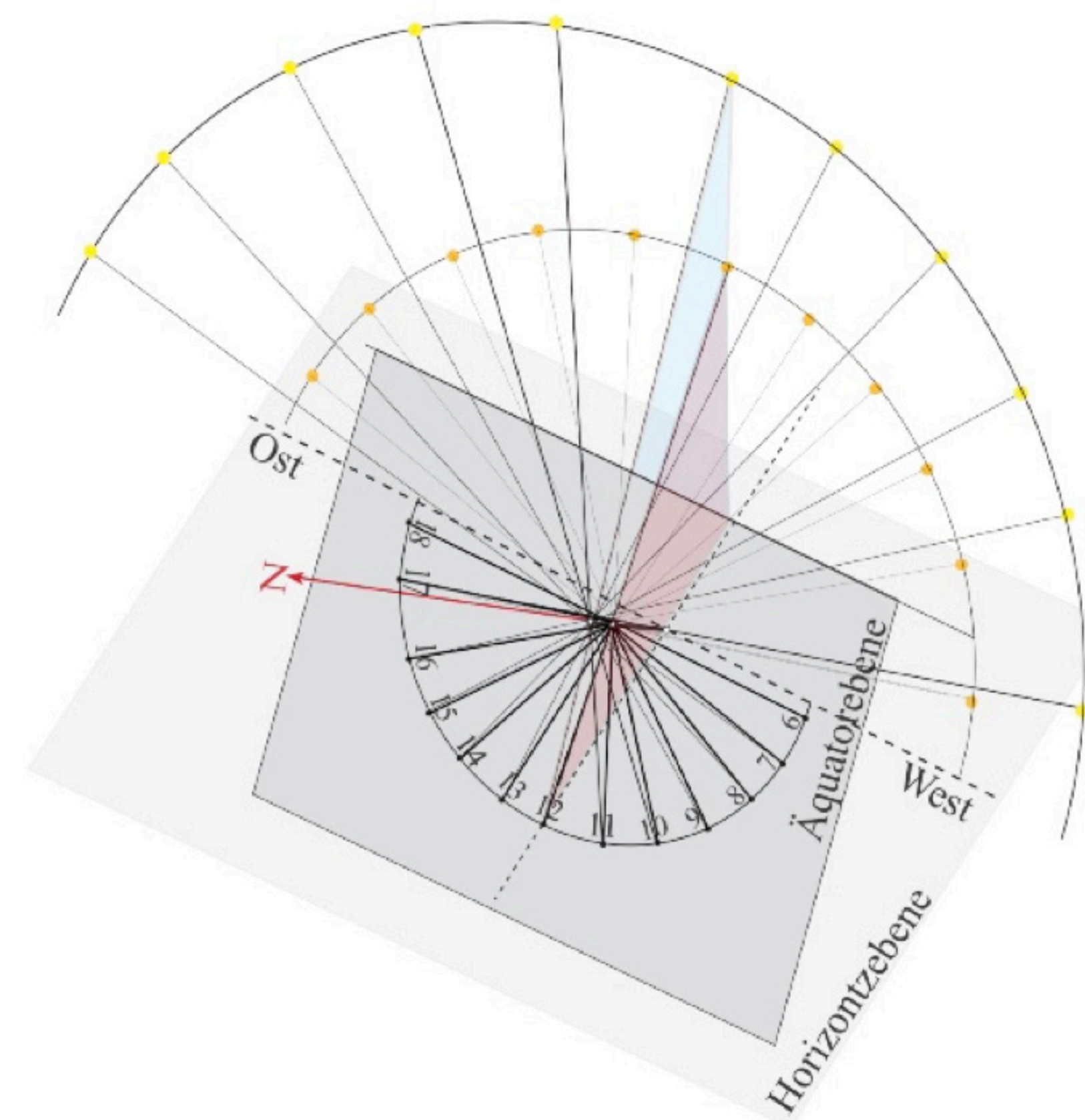


Sowohl die seitliche Bewegung als auch die Höhenbewegung sind vom Datum abhängig. Im Sommer geht die Sonne weiter östlich auf und erreicht auch eine grössere Höhe als im Winter.

Wird zur Zeitangabe der Winkel unter dem wir die Sonne relativ zur Normalrichtung (Azimut) sehen berücksichtigt, so spricht man von einer **Azimutalen Sonnenuhr**. Wird die Höhe über dem Horizont zur Zeitangabe verwendet, so spricht man von einer **Höhensonnenuhr**.

Die Sonne beschreibt an einem Tag - einem Sonnentag - eine Kreisbahn um einen Stab Richtung Himmelsnordpol (Stab parallel zur Erdachse). Die Schattenwürfe auf eine Ebene senkrecht zu diesem Stab (Ebene parallel zur Äquatorialebene) liegen jede volle Stunde  $15^\circ$  auseinander und zwar unabhängig von der Jahreszeit. ( $360^\circ/24\text{h} = 15^\circ/\text{h}$ ).

Die Lage der Schatten ist unabhängig von der Jahreszeit. Ändern tut sich nur die Schattenlänge. Es ist das die einfachste Sonnenuhr, die sog. **Äquatoriale Sonnenuhr**.



Wird der Schatten eines senkrecht im Boden steckenden Stabes (Gnomon) zur Zeitangabe verwendet, so muss die Stundeneinteilung auf der Horizontalebene dem jeweiligen Datum angepasst werden. Es braucht dann nicht mehr einzelne Stundenmarken, sondern gebogene Stundenlinien.

Da diese Linien Spinnenbeinen ähneln, nennt man diese Sonnenuhren **Spinnensonnenuhren**.

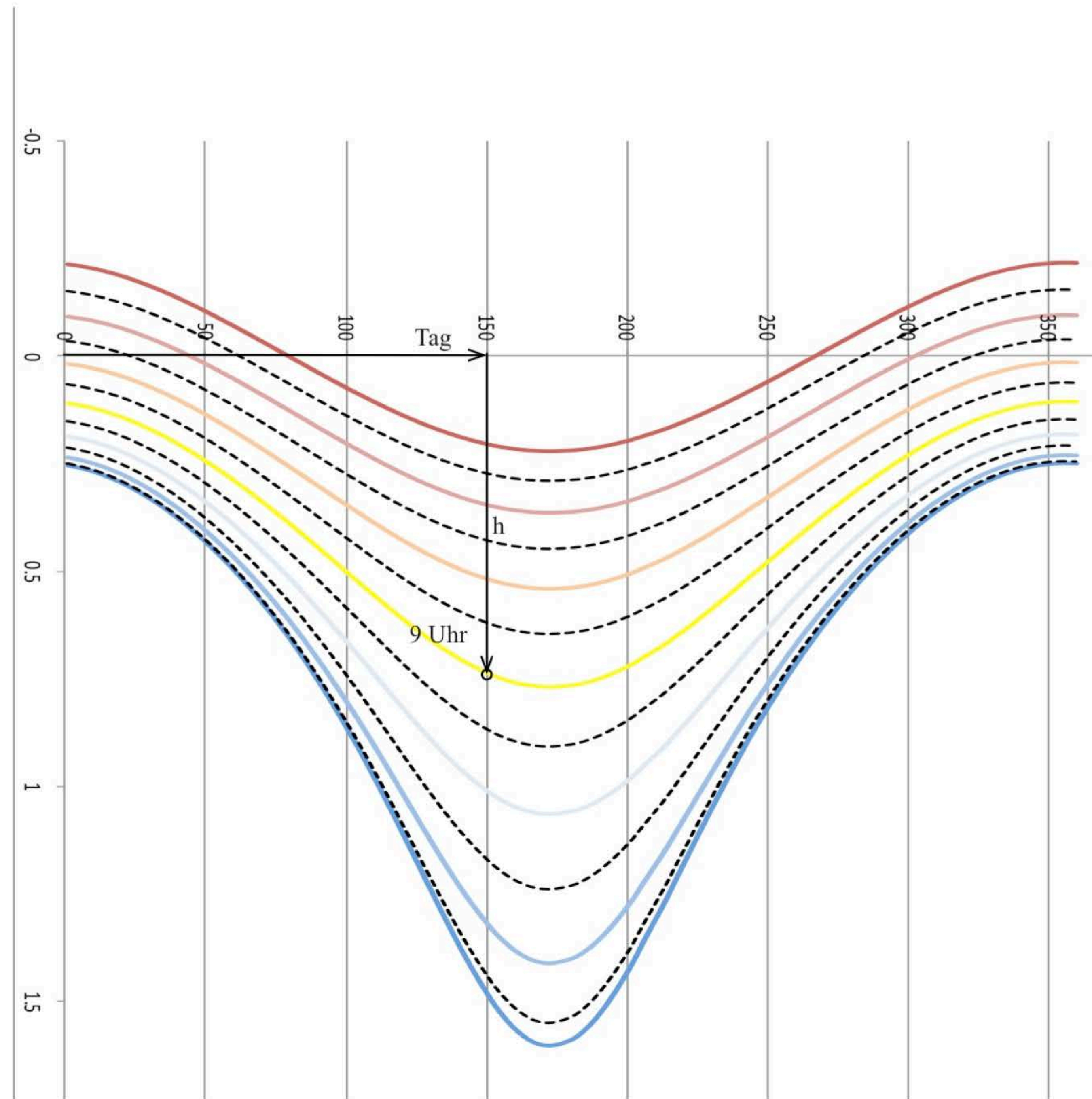
Sollen beim senkrechten Schattenwerfer dennoch feste Stundenmarken die Stunden anzeigen, so muss der Schattenwerfer im Verlaufe des Jahres verschoben werden.

Sonnenuhren dieser Art bezeichnet man als **Analematische Sonnenuhren**.

Die Sonnenuhren, die zur Zeitangabe die Sonnenhöhe verwenden, sind komplexer, denn die Sonnenhöhe ist nicht nur von der Tageszeit abhängig sondern auch noch vom Datum. Diese Sonnenuhren nennt man **Hirtensonnenuhren**.

# a) Hirtensonnenuhr

$$h = \arcsin(\sin \Phi * \sin \delta + \cos \Phi * \cos \delta * \cos \tau)$$



h: Sonnenhöhe  
 Φ: geogr. Breite  
 δ: Sonnenhöhe  
 τ: Stundenwinkel

$$h = \arcsin(\sin \Phi * \sin \delta + \cos \Phi * \cos \delta * \cos \tau)$$

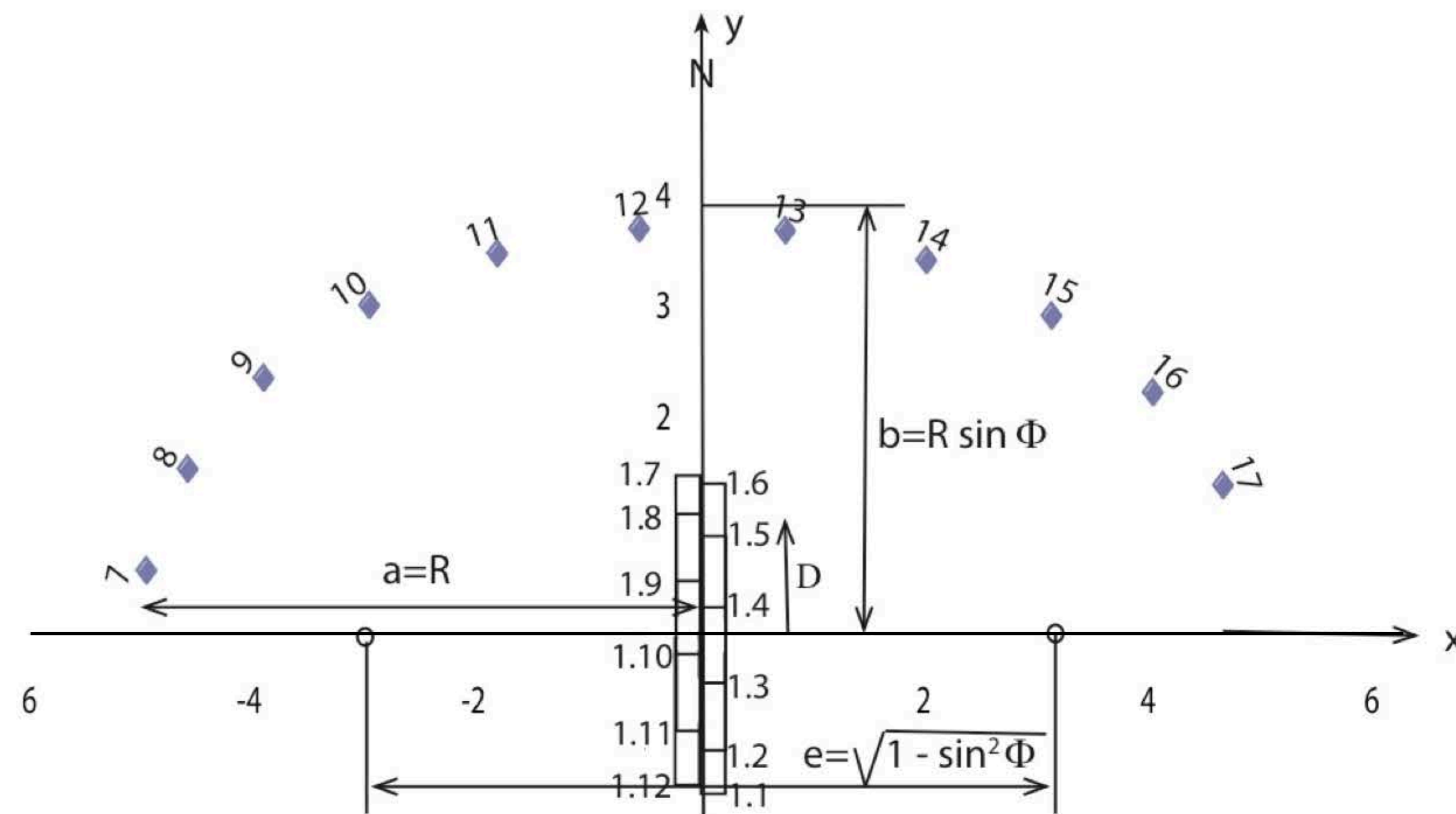
9 Uhr Datum	δ	arc δ	arc Φ	arc τ	sin h	arc sin h	h	Tage
01. Jan	-23.05	-0.402	0.829	-0.785	0.152	0.152	0.086	1
6	-22.55	-0.393	0.829	-0.785	0.159	0.160	0.091	6
11	-21.88	-0.382	0.829	-0.785	0.169	0.170	0.097	11
16	-21.03	-0.367	0.829	-0.785	0.182	0.183	0.104	16
21	-20.016	-0.349	0.829	-0.785	0.197	0.198	0.113	21
26	-18.83	-0.328	0.829	-0.785	0.215	0.216	0.124	26
01. Febr.	-17.25	-0.301	0.829	-0.785	0.238	0.241	0.138	32
6	-15.78	-0.275	0.829	-0.785	0.260	0.263	0.152	37
11	-14.2	-0.248	0.829	-0.785	0.283	0.287	0.166	42
16	-12.52	-0.218	0.829	-0.785	0.307	0.312	0.182	47
21	-10.75	-0.188	0.829	-0.785	0.332	0.339	0.199	52
26	-8.91	-0.155	0.829	-0.785	0.358	0.366	0.216	57
01. Mrz.	-7.8	-0.136	0.829	-0.785	0.374	0.383	0.227	60
6	-5.88	-0.103	0.829	-0.785	0.400	0.412	0.246	65
11	-3.93	-0.069	0.829	-0.785	0.427	0.441	0.266	70
16	-1.96	-0.034	0.829	-0.785	0.453	0.470	0.286	75
21	0	0.000	0.829	-0.785	0.478	0.499	0.307	80
26	1.98	0.035	0.829	-0.785	0.503	0.527	0.328	85
01. Apr.	4.33	0.076	0.829	-0.785	0.532	0.561	0.355	90
6	6.25	0.109	0.829	-0.785	0.555	0.589	0.377	95
11	8.11	0.141	0.829	-0.785	0.577	0.615	0.399	100
16	9.91	0.173	0.829	-0.785	0.598	0.641	0.421	105
21	11.66	0.203	0.829	-0.785	0.617	0.665	0.442	110
26	13.33	0.233	0.829	-0.785	0.635	0.688	0.464	115
01. Mai	14.91	0.260	0.829	-0.785	0.652	0.710	0.484	121
6	16.38	0.286	0.829	-0.785	0.666	0.729	0.504	126
11	17.73	0.309	0.829	-0.785	0.680	0.747	0.523	131
16	18.96	0.331	0.829	-0.785	0.692	0.764	0.540	136
21	20.06	0.350	0.829	-0.785	0.702	0.778	0.556	141
26	21.01	0.367	0.829	-0.785	0.710	0.790	0.569	146
01. Jun	21.98	0.383	0.829	-0.785	0.719	0.803	0.584	151
6	22.6	0.394	0.829	-0.785	0.725	0.810	0.593	156
11	23.05	0.402	0.829	-0.785	0.728	0.816	0.600	161
16	23.33	0.407	0.829	-0.785	0.731	0.819	0.604	167
21	23.43	0.409	0.829	-0.785	0.732	0.821	0.605	172
26	23.35	0.407	0.829	-0.785	0.731	0.820	0.604	177
01. Jul	23.15	0.404	0.829	-0.785	0.729	0.817	0.601	182
6	22.75	0.397	0.829	-0.785	0.726	0.812	0.595	187
11	22.18	0.387	0.829	-0.785	0.721	0.805	0.587	193
16	21.45	0.374	0.829	-0.785	0.714	0.796	0.576	198
21	20.58	0.359	0.829	-0.785	0.707	0.785	0.563	203
26	19.5	0.340	0.829	-0.785	0.697	0.771	0.548	208
1. Aug.	18.166	0.317	0.829	-0.785	0.684	0.753	0.529	213
6	16.85	0.294	0.829	-0.785	0.671	0.736	0.511	218
11	15.43	0.269	0.829	-0.785	0.657	0.717	0.491	223
16	13.91	0.243	0.829	-0.785	0.641	0.696	0.471	228
21	12.3	0.215	0.829	-0.785	0.624	0.674	0.450	233
26	10.6	0.185	0.829	-0.785	0.605	0.650	0.429	238
1. Sept.	8.43	0.147	0.829	-0.785	0.581	0.620	0.403	244
6	6.65	0.116	0.829	-0.785	0.560	0.595	0.381	249
11	4.76	0.083	0.829	-0.785	0.538	0.568	0.360	254
16	2.85	0.050	0.829	-0.785	0.514	0.540	0.338	259
21	0.91	0.016	0.829	-0.785	0.490	0.512	0.317	264
23	0.15	0.003	0.829	-0.785	0.480	0.501	0.309	266
26	-1.03	-0.018	0.829	-0.785	0.465	0.483	0.296	269
01. Okt	-2.96	-0.052	0.829	-0.785	0.439	0.455	0.276	274
6	-4.9	-0.085	0.829	-0.785	0.413	0.426	0.256	279
11	-6.81	-0.119	0.829	-0.785	0.387	0.398	0.237	284
16	-8.68	-0.151	0.829	-0.785	0.361	0.370	0.219	289
21	-10.5	-0.183	0.829	-0.785	0.336	0.343	0.201	294
26	-12.25	-0.214	0.829	-0.785	0.311	0.316	0.185	299
1. Nov.	-14.25	-0.249	0.829	-0.785	0.282	0.286	0.166	305
6	-15.81	-0.276	0.829	-0.785	0.259	0.262	0.151	310
11	-17.26	-0.301	0.829	-0.785	0.238	0.240	0.138	315
16	-18.6	-0.324	0.829	-0.785	0.218	0.220	0.126	320
21	-19.81	-0.346	0.829	-0.785	0.200	0.202	0.115	325
26	-20.833	-0.363	0.829	-0.785	0.185	0.186	0.106	330
01. Dez	-21.71	-0.379	0.829	-0.785	0.172	0.173	0.098	335
6	-22.43	-0.391	0.829	-0.785	0.161	0.162	0.092	340
11	-22.96	-0.401	0.829	-0.785	0.153	0.154	0.087	345
16	-23.28	-0.406	0.829	-0.785	0.148	0.149	0.084	350
21	-23.43	-0.409	0.829	-0.785	0.146	0.146	0.083	355
26	-23.38	-0.408	0.829	-0.785	0.147	0.147	0.084	360

h: Sonnenhöhe  
 Φ: geogr. Breite  
 δ: Sonnenhöhe  
 τ: Stundenwinkel

## b) Analemmatische Sonnenuhr

$$\tau = ((\text{MEZ} * 60 + 4 * (\lambda - 15)) / 60 - 12) * 15 \quad D = R * \cos \Phi * \text{tg} \delta$$

Winterthur:  $\Phi = 47,513^\circ$ ,  $\lambda = 8.765^\circ$



Winterthur:  $\Phi = 47.513^\circ$ ,  $\lambda = 8.765^\circ$

$\tau$	$x=R \sin \tau$	$y=R \sin \Phi \cos \tau$
-186,284	0,54	-3,67
-171,284	-0,77	-3,64
-156,284	-2,02	-3,37
-141,284	-3,13	-2,87
-111,284	-4,66	-1,33
-96,284	-4,97	-0,40
-81,284	-4,94	0,56
-66,284	-4,58	1,48
-51,284	-3,90	2,31
-36,284	-2,96	2,97
-21,284	-1,81	3,44
-6,284	-0,55	3,66
8,716	0,76	3,64
23,716	2,01	3,38
38,716	3,13	2,88
53,716	4,03	2,18
68,716	4,66	1,34
83,716	4,97	0,41
98,716	4,94	-0,56
113,716	4,58	-1,48
128,716	3,90	-2,30
143,716	2,96	-2,97
158,716	1,82	-3,43
173,716	0,55	-3,66

$$D = R * \cos \Phi * \text{tg} \delta$$

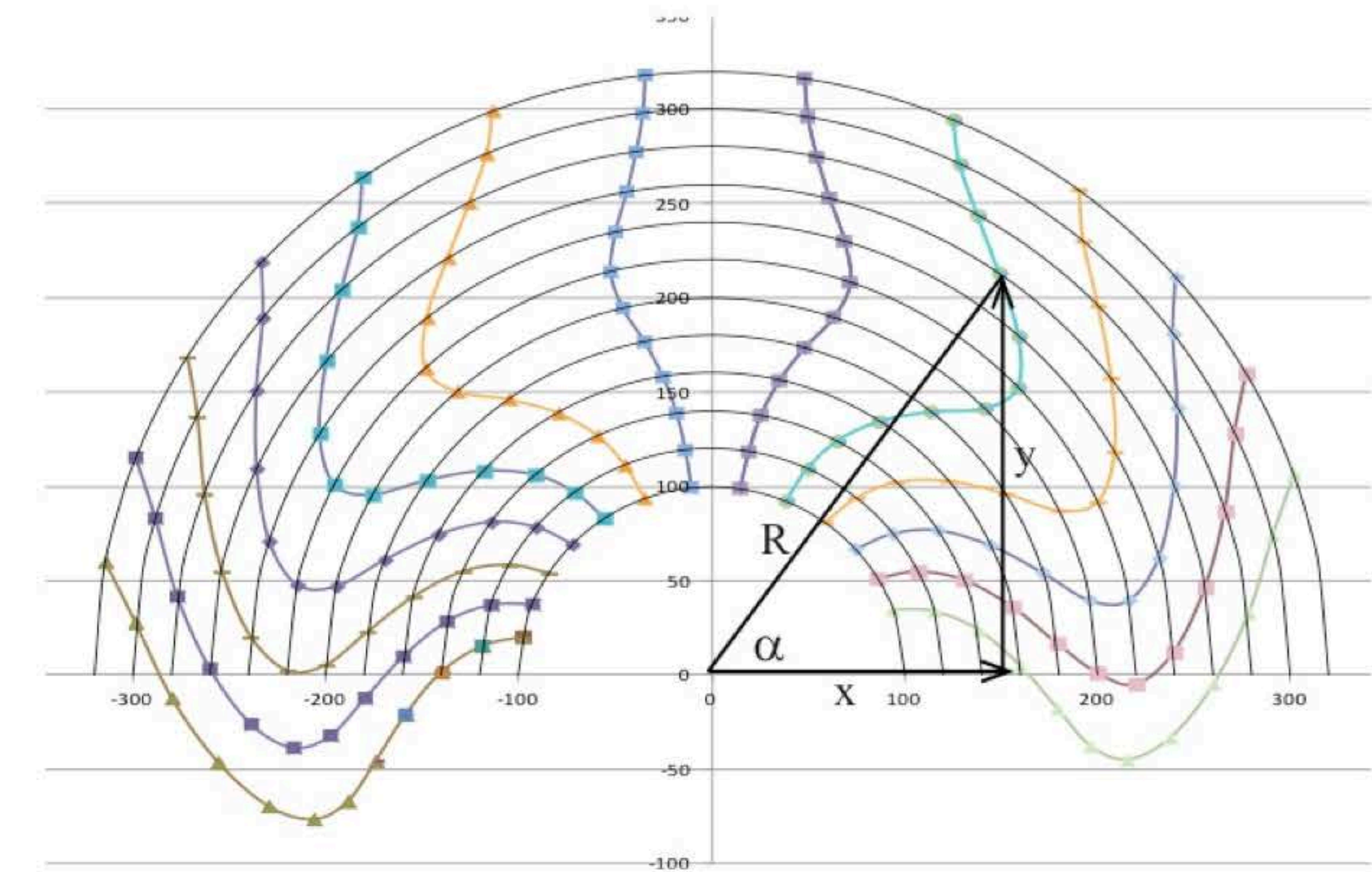
Monat	$\delta$
1.1.	-1,436
1.2.	-1,046
1.3.	-0,458
1.4.	0,260
1.5.	0,903
1.6.	1,366
1.7.	1,443
1.8.	1,105
1.9.	0,499
1.10.	-0,180
1.11.	-0,862
1.12.	-1,348

$$\delta = \arcsin(\sin(\text{sin}(360/365^\circ T))$$

$\delta$ : Sonnenhöhe  
 $\tau$ : Wahre Ortszeit (WOZ) Sonnenstundenwinkel { Sonne im Zenit,  $\tau = 180^\circ$  }  
 $\epsilon$ : 23.5°: Schiefe der Ekliptik  
 $T$ : Anzahl Tage nach Frühlingspt.

## c) Spinnensonnenuhr

$$\alpha = \arcsin(\sin \tau / (\cos \Phi \cos \tau - \text{tg} \delta \cos \Phi))$$



Monat	$\delta$
1.1.	-23.03
1.2.	-17.2
1.3.	-7.72
1.4.	4.4
1.5.	14.97
1.6.	22.01
1.7.	23.13
1.8.	18.11
1.9.	8.41
1.10.	-3.05
1.11.	-14.31
1.12.	-21.75

$\delta$ : Sonnenhöhe  
 $\Phi$ : geogr. Breite Winterthur  
 $47,513^\circ$   
 $\alpha$ : Azimut  
 $\tau$ : Stundenwinkel  
 $x,y$ : Kartesische Koordinaten

6 Uhr					7 Uhr				
R	$\tan \alpha$	$\alpha$	x	y	R	$\tan \alpha$	$\alpha$	x	y
100	4.78952699	1.36496438	97.8891288	20.438162	100	2.47453014	1.18674575	-92.715458	37.4679041
120	7.67545872	-1.4412407	118.994328	15.5032204	120	3.07548924	1.25642739	114.119004	37.1059676
140	82.9244628	1.55873774	139.989821	1.68816073	140	4.84896904	1.36741819	-137.11458	28.2770582
160	7.5560053	1.43921593	158.616925	-20.992167	160	16.4001171	1.50989655	159.703389	9.73794202
180	3.82040494	1.31478757	174.133503	45.5798549	180	14.4521529	1.5017126	-179.57064	12.4251827
200	2.81904646	1.22991404	188.492013	66.8637485	200	6.14557703	1.4094914	197.403709	32.1212651
220	2.70046828	1.21614715	206.309043	76.3975064	220	5.60580202	1.39426659	-216.58099	38.6351479
240	3.30811882	1.27724305	229.733223	69.4452755	240	9.09366336	1.46126972	238.561909	26.2338619
260	5.53946037	1.39219685	-255.8643	46.1893909	260	79.9127278	1.55828333	259.979645	3.2532946
280	22.8046474	1.52697369	279.731184	12.2664113	280	6.66709217	1.42191574	276.902568	41.5327343
300	10.7210003	1.47779055	298.703424	27.8615256	300	3.47314873	1.29045568	288.288373	83.0049028
320	5.23468803	1.38203722	314.316107	60.0448594	320	2.58894934	1.20219315	298.506095	115.300092

# 9. Oelfleckexperiment

Atomare Dimensionen lassen sich mit einem einfachen Experiment ermitteln.

Um das Experiment zu verstehen eignet sich ein Vor-  
experiment mit Küchengeräten und Kichererbsen.  
Der Durchmesser der Kichererbsen wird wie folgt  
bestimmt:

1. Es wird das Volumen  $V$  einer bestimmten Menge an Kichererbsen bestimmt. (Die Menge wurde so gewählt, dass die Kichererbsen den Boden eines Backbleches zudecken.)
2. Die Kichererbsen werden in das Backblech gegeben, und der Durchmesser des kreisrunden Bodens bestimmt.

Der Erbsendurchmesser  $d$  berechnet sich aus dem  
Volumenvergleich:

$$V = (D/2)^2 \pi d \quad \rightarrow \quad d = V / (D/2)^2 \pi$$
$$d = 440 \text{ cm}^3 / (13.5 \text{ cm})^2 3.14$$
$$d = \underline{7.3 \text{ mm}}$$

Im Realexperiment verwendet man an Stelle von Erbsen die Moleküle der Oelsäure.  
Zur Steigerung der Genauigkeit wird die Oelsäure in Leichtbenzin im Verhältnis 1 : 2000 gelöst.  
Das Volumen eines Oelsäure-Leichtbenzin Tropfens kann so in einem Messzylinder einfach bestimmt werden. Das Volumen eines Oeltropfens ergibt sich dann als 1/2000 des Volumens des Gemisches. Es entspricht das dann dem Volumen der Erbsenmonoschicht



Im Realexperiment verwendet man Oelsäure verdünnt mit Leichtbenzin im Verhältnis 1 : 2000. 50 Tropfen dieser Lösung besitzen ein Volumen von  $2.3 \text{ cm}^3$

Ein Tropfen, des Gemisches, der auf das mit Pfeffer überschichtete Wasser gegeben wird, treibt den Pfeffer auseinander. Das Benzin verdampft Die monomolekulare Ölschicht hat das Volumen  $V = 2.3 / (50 \cdot 2000) = 0.000023 \text{ cm}^3 = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^3$ .

Die Grundfläche dieser Ölschicht ergibt sich zu  
 $A = 12.5^2 \cdot 3.14 \text{ cm}^2 = 490.6 \text{ cm}^2$

Daraus berechnet sich aus dem Volumenvergleich die **Schichtdicke** zu :

$$d = 2.3 \cdot 10^{-5} / 490.6 = 0.46 \cdot 10^{-7} \text{ cm} = 0.46 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Die Schichtdicke entspricht ungefähr dem Durchmesser eines Moleküls. Unter der Annahme, dass ein Molekül das Volumen eines Würfels einnimmt und alle Atome als gleich gross angenommen werden, kann das Volumen eines Atoms berechnet werden, indem das Molekülvolumen  $V'$  aus  $d^3$  berechnet wird.

Durch Division durch die Anzahl Atome im Molekül ergibt sich das ungefähre Volumen eines Atoms und daraus der **Atomdurchmesser** zu:

$$a = \sqrt[3]{d^3 / 88} = 0.46 \cdot 10^{-9} / 4.4 = 0.104 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 1 \text{ \AA}$$

Ein **Angström** entspricht atomaren Grössenordnungen

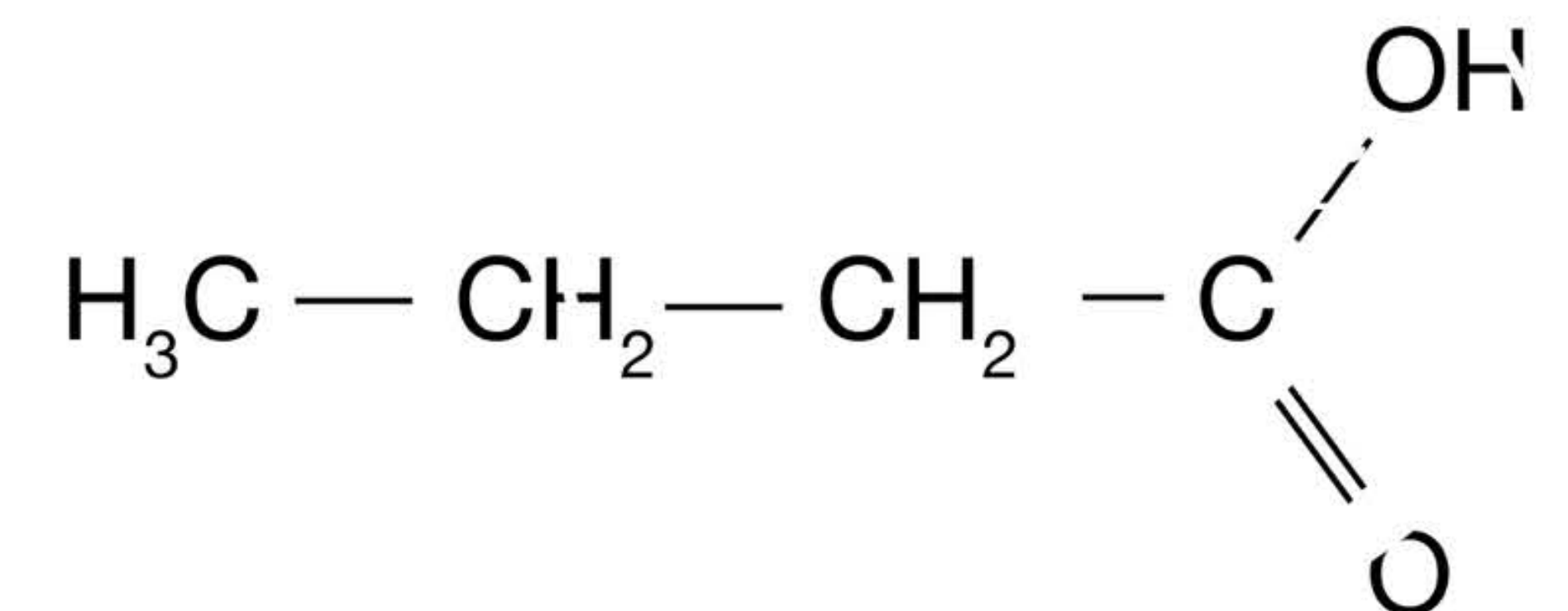
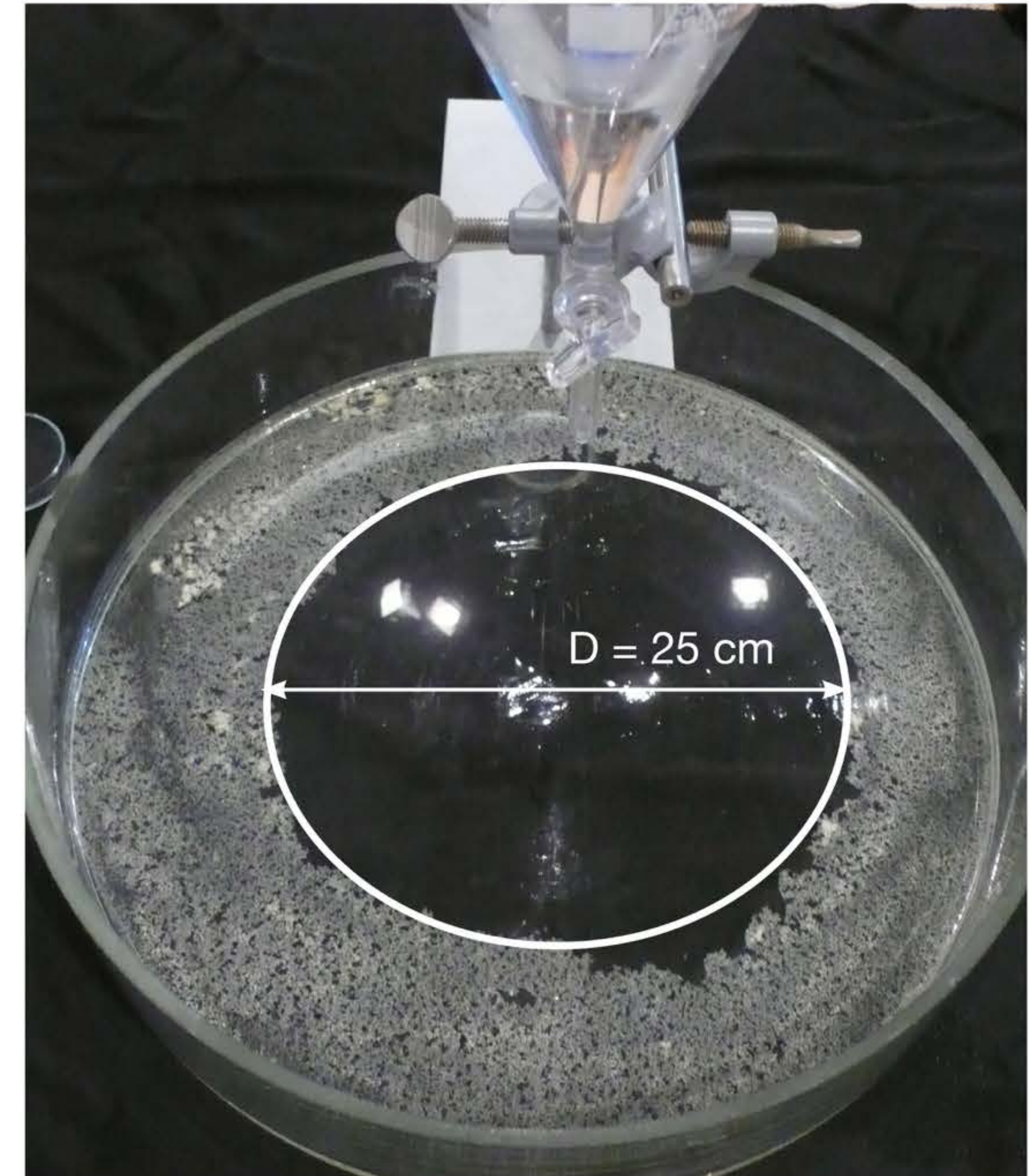
**Anzahl Moleküle** in der Ölschicht:

$$N = V / d^3 = 2.3 \cdot 10^{-5} / (0.46 \cdot 10^{-7})^3 = 23.6 \cdot 10^{16}$$

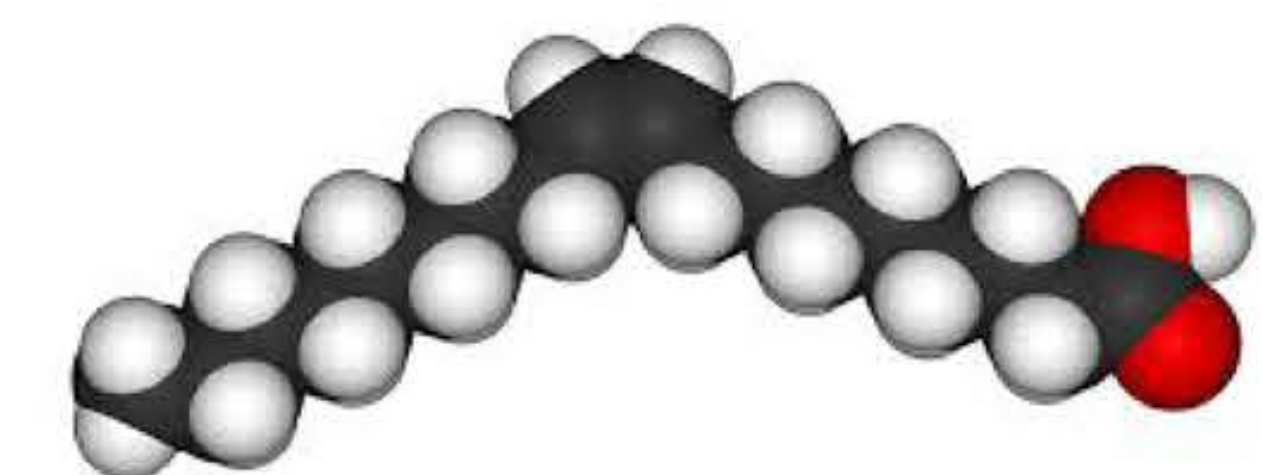
Ein Mol (88 g) Oelsäure enthält  $6.02 \cdot 10^{23}$  Moleküle (Avogadrozahl). Die Öldichte beträgt  $0.895 \text{ g/cm}^3$ .

Das ergibt die Masse der Ölschicht zu:

$$m = 2.3 \cdot 10^{-5} \cdot 0.895 \text{ g} = 2.06 \cdot 10^{-5} \text{ g, was ungefähr } 2.3 \cdot 10^{-7} \text{ Mol entspricht, also } 14 \cdot 10^{16} \text{ Molekülen.}$$



Chemische Formel von Oelsäure



Dreidimensionales Modell von Oelsäure